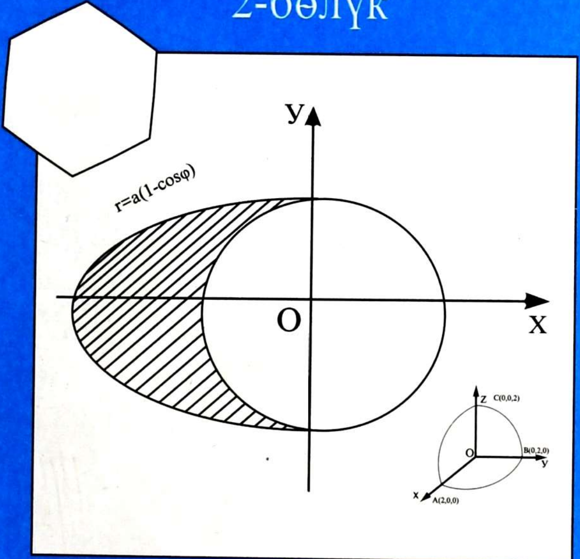
А. А. БӨРҮБАЕВ, Б. ШАБЫКЕЕВ,
К. БАРАТАЛИЕВ

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ

2-бөлүк



А. А. БӨРҮБАЕВ, Б. ШАБЫКЕЕВ,
К. БАРАТАЛИЕВ

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ

2-бөлүк

Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн
окуу китеби

Экинчи басылышы

*Кыргыз Республикасынын Билим берүү
министрлиги бекиткен*

Бишкек
«Акыл»
2005

ББК 74.262 я 73
Б — 86

«Акыл» ААК — «Кыргызстан» Басма Үйү
2000-жылы Бельгия өлкөсүнүн борбору
Брюсселде «EMRC» — ЕВРОПАЛЫК сапат
сертификатына ээ болгон

Рецензенттери:

Физика-математика илим. кандидаты *М. Джураев*
Физика-математика илим. доктору, профессор *А. Саадабаев*
Физика-математика илим. доктору, профессор *А. А. Чикеевдин*
редакциясы астында

1-басылышы 2002-жылы жарык көргөн

Сүрөтчүсү *Б. Жумалиев*

Бул окуу китеби мурда басылып чыккан «Математикалык анализ» 1-бөлүктүн уландысы. Окуу китеп базалык жогорку билим берүүнүн Мамлекеттик стандарттагы программаларынын негизинде жазылган, жети главадан турат. Главалардын катар номерлери 1-бөлүккө ылайыкталып удаалаш берилген.

Китеп жогорку окуу жайларынын математика, физика, информатика жана колдонмо математика, ошондой эле техникалык жогорку окуу жайларынын студенттерине арналат

Шарттуу белгилер

○ — далилдөөнүн башталышы
● — далилдөөнүн бүтүшү
Δ — чыгарылыштын башталышы
▲ — чыгарылыштын бүтүшү

$Б \frac{4306010500 - 033}{М\ 455\ (11) - 2005} - 2005$ ББК 74. 262 я 73

ISBN 5-655-01544-7

КИРИШ СӨЗ

Бул окуу китеп авторлордун көп жылдан бери Кыргыз мамлекеттик Улуттук Университетиндеги механико-математикалык факультетинде окутуп келе жаткан тажрыйбаларына таянып жазылган. Мурда басылып чыккан 1-бөлүктүн (Математикалык анализ, 1-бөлүк, "Мектеп" басмасы 2000-жыл) уландысы. Биринчи бөлүктүн негизги максаты функцияларды окуп билүүдө. Дифференциалдык эсептөөлөр функциялардын тигил же бул касиеттерине байланышкан көп суроолорду үйрөтөт. Бирок, бир гана дифференциалдык эсептөөлөр аркылуу кээ бир функцияларды (мисалы, үзгүлтүксүз жана эч бир чекитте дифференцирленбөөчү, ал турмак мындай функциялардын аныкталышын) эффективдүү окуп үйрөнө албайбыз. Мындай жана көп башка проблемалар китептин экинчи бөлүгүндө жазылды. Экинчи бөлүктөгү главалардын номерлери 1-бөлүккө карата удаалаш берилген. Ал главалар: сан катарлар, функционалдык катарлар, өздүк эмес жана параметрден көз каранды болгон интегралдар, Фурьенин катары жана интегралдары, эселүү интегралдар, ийри сызыктуу жана беттик интегралдар жана талаа теориясынан маалыматтар.

Окурман жакшы түшүнүш үчүн ар бир главадагы параграфтар чиймеси менен берилип, кеңири чыгарылган мисал-маселелер менен коштолду. Ошондой эле, окуу китепте окуучулар жетишерлик түшүнө албаган параграфтарга, алсак, функциянын бир калыпта үзгүлтүксүздүгүнө, өздүк эмес интегралдын жыйналуу белгилерине, функционалдык катарлардын жана параметрден көз каранды болгон интегралдардын бир калыпта жыйналышына өзгөчө көңүл бурулду.

Талапка ылайык, бакалавриаттын жана магистратуранын адистерин окутууга багытталган базалык жогорку билим берүүнүн Мамлекеттик стандартындагы, базалык-адистик билим берүүнүн, Е.01-математика, Е.02-колдонмо математика жана информатика, Е.04-физика программалары эске алынды. Демек, окуу китеп студенттердин теориялык билимдерин бекемдөөгө, математикалык маданиятын өстүрүүгө, математикалык аппаратты ар кандай маселелерди чыгарууда пайдалана билгичтиктерин өнүктүрүүгө шарт түзөт деп эсептейбиз.

Авторлор

VIII глава

САН КАТАРЛАРЫ

§ 1. ЖЫЙНАЛУУЧУ КАТАРЛАРДЫН АНЫКТАМАСЫ ЖАНА КАСИЕТТЕРИ

1. Жыйналуучу катарлар жана анын суммасы

Бизге чексиз сандардын (анык сандардын же комплекстүү сандардын) удаалаштыгы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ берилсин. Анда

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ туюнтмасын сан катар деп, аны $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

символу менен белгилейбиз, ал эми a_n катардын мүчөлөрү. Ошентип,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Биринчи n мүчөлөрүнүн суммасын (1) сан катарынын n-

айрым суммасы деп, аны $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (2)

түрүндө жазабыз. Мындан биринчи, экинчи, үчүнчү ж.б. айрым суммалары

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

өз иретинде чексиз удаалаштыкты түзөт.

Аныктама. *Эгерде айрым суммалардан түзүлгөн $\{S_n\}$ удаалаштык чектелген пределге*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ээ болсо, анда (1) катарды жыйналуучу деп, ал эми S ти ал катардын суммасы деп атайбыз жана

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ \dots\ + a_n + \ \dots \qquad (3)$$

түрүндө жазабыз.

Эгерде айрым суммалардан түзүлгөн $\{S_n\}$ удаалаштык чектелген пределге ээ болбосо (предел аныкталбаса же чексиз болсо), анда (1) катарды *таралуучу катар* деп айтышат.

Мисал катары, геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнөн түзүлгөн, геометриялык катар деп аталуучу

$$a + aq + aq^2 + \ \dots\ + aq^{n-1} + \ \dots \quad (a \neq 0) \qquad (4)$$

катарды карайлы да q кандай маанисинде жыйналарын далилдейли. Ал үчүн n-айрым суммасын алабыз.

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}. \qquad (5)$$

а) $|q| < 1$ болсун (прогрессия кемүүчү), анда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

Ошондуктан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

б) $|q| > 1$ болсо, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, анда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \infty.$$

в) $q = -1$ десек,

$$S_n = \frac{a}{2}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & \text{эгерде жуп,} \\ a \neq 0, & \text{эгерде } n \text{ так болсо.} \end{cases}$$

Бул убакта S_n пределге ээ болбойт. Алдыдагы (5) формула $q \neq 1$ маанисинде орун алат, бирок $q = 1$ десек, анда

$$S_n = a + a + \ldots + a = na$$

болот да $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Демек, (4) катар $|q| < 1$ маанисинде жыйналат жана

$$S = \frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{6}$$

суммасына ээ болот, ал эми q нун калган маанилеринде таралуучу катар болот.

1-мисал. Эгерде бардык $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн

$$a_n = b_n - b_{n+1} \tag{7}$$

барабардыгы орун алса жана чектелген

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \tag{8}$$

предели аныкталса, анда (1) катардын жыйналарын жана $S = b_1 - b$ суммасына, б.а.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b \text{ га} \tag{9}$$

ээ болорун далилдегиле.

Δ Алдыдагы (7) барабардыктын негизинде (2) айрым сумманы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \ldots$$

$$\ldots + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

түрүндө жазабыз жана (8) эске алсак, анда (9) далилденген болот. ▲

2-мисал. Эгерде $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ болсо, жогорку (1) катардын суммасын тапкыла.

△ Эгерде

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

түрүндө жазылып, $b_n = \frac{1}{2n(n+1)}$, $b = 0$ десек, $\{a_n\}$ удаалаштыгы (7) жана (8) барабардыктарды канааттандырат, анда (9) боюнча

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}. \ \blacktriangle$$

2. Катарлардын жыйналуучулугунун зарыл шарты

Эгерде (1) катар жыйналса, анда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{10}$$

○ Шарт боюнча (1) жыйналуучу катар болгондуктан $\{S_n\}$ удаалаштыгы үчүн чектүү S предели аныкталат. (S_n — (2) формула менен аныкталуучу (1) катардын n-айрым суммасы), б.а.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ жана } \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Ал эми $S_n - S_{n-1} = a_n$ болгондуктан, (10) барабардык келип чыгат. ●

Демек, (10) барабардык катарлардын жыйналуучулугунун зарыл шарты болуп саналат.

3-мисал. Катардын $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ жыйналуучулугун далилдегиле.

△ $k = 1, 2, \ldots, n$ маанилеринде $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ болгондуктан $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Мындан $n \to \infty$ да $S_n \to \infty$ келип чыгат, б.а. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ катары таралуучу катар. ▲

Далилденген, (10) барабардык катарлардын жыйналуучулугунун жетиштүү шарты боло албайт, себеби 3-мисалдагы катар (10) барабардыкты канааттандырат, бирок таралуучу катар экендиги далилденди. Дагы бир мисал келтирели. Гармоникалык * катар деп аталуучу

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{11}$$

катарды алсак, анда (10) барабардык орун алат, бирок таралуучу катар болуп саналат. Анткени

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \text{ жана}$$

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

айрым суммаларын алсак, анда

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n},$$

б.а. $S_{2n}-S_n\geqslant\frac{1}{2}$ болуп, $n\to\infty$ да $S_{2n}-S_n$ чоңдугу эч убакта нөлгө умтулбайт. Демек, гармоникалык катар дайыма таралуучу катар болот.

3. Жыйналуучу катарлардын касиеттери

1^0. Эгерде (1) жана

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{12}$$

катарлары жыйналса жана S, σ суммаларына ээ болсо, анда ар кандай $\lambda,\mu\in R$ үчүн

---

* (11) катардын, экинчи мүчөсүнөн баштап, ар бир мүчөсү коңшу эки мүчөлөрүнүн гармоникалык орточосун берет. (Оң a жана b сандарынын орто гармоникалык саны $c=2:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) \tag{13}$$

катары да жыйналат жана

$$\tau = \lambda S + \mu\sigma \tag{14}$$

суммасына ээ болот.

○ Биз (1), (12) жана (13) катарлардын n-айрым суммаларын S_n, σ_n жана τ_n менен белгилейли. Анда $\tau_n = \lambda S_n + \mu\sigma_n$ болот. Шарт боюнча $n \to \infty$ да $S_n \to S$ жана $\sigma_n \to \sigma$. Демек, сөзсүз $n \to \infty$ да $\{\tau_n\}$ удаалаштык чектүү τ пределине ээ болот, б.а. (13) жыйналат жана (14) суммасына ээ болот. ●

2^0. Эгерде (1) катар жыйналса, анда

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{15}$$

катары да жыйналат. (Бул (15) катарды (1) катардын биринчи m мүчөсүнөн кийинки калдык катар же жөн эле калдык деп аташат.) Тескерисинче, эгерде m ар бир туруктуу маанисинде (15) катар жыйналса, анда сөзсүз (1) да жыйналат.

○ Биз (1) катардын n-айрым суммасын S_n, ал эми (15) катардын k-айрым суммасын $\sigma_k^{(m)}$ белгилесек, б.а.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \sigma_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}$$

болсо, анда $S_n = S_m + \sigma_k^{(m)}, \ (n = m + k)$ (16)

барабардыгына ээ болобуз. Эгерде (1) катар жыйналса, анда $\{S_n\}$ удаалаштыгы $n \to \infty$ да чектүү пределге ээ болот жана ошонун негизинде $\{\sigma_k^{(m)}\}$ (m-туруктуу) удаалаштыгы да ($k \to \infty$) чектүү пределге ээ болот, б.а. (15) катар жыйналат. Тескерисинче, эгерде $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k^{(m)}$ чектүү болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ да чектүү, б.а. (1) жыйналат. ●

Бул касиеттен төмөнкүдөй тыянак келип чыгат:

Эгерде жыйналуучу катардын биринчи m мүчөсүн жазбай калтыруудан же кошуп жазуудан анын жыйналуучулугу сакталат.

3^0. Эгерде (1) катар жыйналса, анда (1) катардын мүчөлөрүн жайланышкан иретин өзгөртпөй, топтоо жолу менен алынган

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \tag{17}$$

катар да жыйналат жана ошол эле (1) катардын суммасына ээ болот.

Биз төмөнкүдөй топтойлу: $b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}$, $b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_{1+2}} + \ldots + a_{k_2}$, ..., $b_j = b_{k_{j-1}} + \ldots + b_{k_j}$,

мында $j \in \boldsymbol{N}, \{k_j\}$ — накта өсүүчү натуралдык сандардын удаалаштыгы. Эгерде $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \sigma_k = \sum_{j=1}^{m} b_j$ болсо, анда $\sigma_m = S_{km}$ орун алат. Ал эми $\{\sigma_m\}$ удаалаштыгы жыйналуучу $S_1, S_2, \ldots,$ удаалаштыктын камтылган удаалаштыгы болгондуктан $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m = S$ предели аныкталат. Демек, (17) катар жыйналат жана анын суммасы (1) катардын S суммасына барабар. ●

4. Жыйналуучу катарлар жөнүндө Кошинин критерийи

Теорема: (1) *катар жыйналыш үчүн*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\, \boldsymbol{N}_\varepsilon : \forall n \geqslant \boldsymbol{N}_\varepsilon, \forall p \in \boldsymbol{N} \to \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon \tag{18}$$

барабарсыздыгы аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ Мында $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$ (S_n (1) катардын n-айрым суммасы) болгондуктан, (18) шарт $\{S_n\}$ удаалаштыгы фундаменталдуу экендигин билгизет. (II гл., 1-бөлүк). Жыйналуучу удаалаштык жөнүндөгү Кошинин критерийи менен

(18) шарт $\{S_n\}$ удаалаштыгынын чектелген предели аныкталышына тең күчтүү, б.а. (1) катардын жыйналышы менен тең күчтүү. ●

Эскертүү. Эгерде (18) шарт орун албаса, б.а.

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall k \in N\ \exists n \geq k \exists p \in N \to \left|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\right| \geq \varepsilon_0 \qquad (19)$$

болсо, анда (1) таралуучу катар болот.

4-мисал. Кошинин критерийин колдонуп,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

катардын жыйналышын далилдегиле.

Δ Эрктүү $\varepsilon > 0$ санын алып, бул санга туура келген N_ε натуралдык санын (18) шарт, б.а. $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы $\forall n \geq N_\varepsilon$, $p \in N$ үчүн орун аларын көрсөтөлү. Ал үчүн

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)};\quad \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)(n+2)};\ \ldots;$$

$$\frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

барабарсыздыктарын эске алсак, анда

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Мындан $n > N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ болсо, $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$. Демек, берилген катар жыйналат. ▲

5-мисал. Гармоникалык катар (п.2. (11))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{20}$$

таралышын далилдегиле.

Δ Ар кандай $k \in N$ үчүн $n = k, p = k$ деп алалы. Анда

$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$ жана (19) шартынын негизинде (20) катар таралуучу катар болот. ▲

§ 2. ОҢ МҮЧӨЛҮҮ КАТАРЛАР

1. Оң мүчөлүү катарлардын жыйналуучулугунун критерийи (белгиси)

1-теорема. *Эгерде*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{21}$$

катарынын мүчөлөрү оң, б.а.

$$\forall n \in N \rightarrow a_n \geqslant 0 \tag{22}$$

болсо, анда бул катар жыйналыш үчүн анын айрым суммаларынан түзүлгөн $\{S_n\}$ удаалаштык жогору жагынан, б.а.

$$\exists M > 0 : \forall n \in N \rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M \tag{23}$$

чектелиши зарыл жана жетиштүү.

○ Алдыңкы (22) шарттын негизинде $\{S_n\}$ — өсүүчү удаалаштык, себеби $n \geqslant 1$ номеринен тартып $S_n - S_{n-1} = a_n \geqslant 0$.

Эгерде оң мүчөлүү (21) катар жыйналса, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ чектүү предели аныкталса, анда өсүүчү удаалаштыктын предели жөнүндөгү теорема боюнча

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \to S_n \leqslant S$$

барабарсыздыгы аткарылып, (23) шарт орун алат.

Тескерисинче, эгерде оң мүчөлүү (21) катар (23) шартты канааттандырса, анда өсүүчү $\{S_n\}$ удаалаштыгы жогору жагынан чектелген. Ошондуктан ал чектүү пределге ээ болот, б.а. (21) катар жыйналат. ●

2. Катардын салыштыруу белгиси

2-теорема. *Эгерде бардык* $n \in \boldsymbol{N}$ *үчүн*

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \tag{24}$$

шарты аткарылса, анда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{25}$$

катарынын жыйналуучулугунан (21) катардын жыйналуучулугу келип чыгат, ал эми (21) катардын таралуучулугунан (25) катардын таралуучулугу келип чыгат.

○ Оң мүчөлүү (25) катардын жыйналуучулугунан, ((24) шарт) 1-теорема боюнча, анын айрым суммаларынан түзүлгөн удаалаштык жогору жагынан чектелиши, б.а.

$$\exists M : \forall n \in \boldsymbol{N} \to \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant M$$

келип чыгат жана мындан (24) шартты колдонуп,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant M, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$$

барабарсыздыгын алабыз. Ошентип, (21) катардын айрым суммаларынан түзүлгөн удаалаштык жогору жагынан чектелгендиктен, 1-теореманын негизинде, (21) катар жыйналат.

Эгерде (21) катар таралса, анда (25) катар да таралышы керек, таралбай (25) катар жыйналса, анда (21) катар да жыйналат. ●

1-мисал. $a_n = \dfrac{(3+2(-1)^n)(1+\sin^3 n)}{n\sqrt{n}}$ болгон учурда (21) катардын жыйналышын далилдегиле.

Δ Мында $1 \leqslant 3 + 2(-1)^n \leqslant 5,\ \ 0 \leqslant 1 + \sin^3 n \leqslant 2$ болгондуктан $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{10}{n^{3/2}}$. Анда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10}{n^{3/2}}$ катарынын жыйналышынан, 2-теорема боюнча, (1) катардын жыйналышы келип чыгат. ▲

1-натыйжа. Эгерде бардык $n > n_0$ үчүн $a_n > 0$ жана $b_n > 0$ аткарылса жана $n \to \infty$ да $a_n \sim b_n$, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ болсо, анда (21) жана (25) катарлар же чогуу жыйналат, же чогуу таралат.

2-мисал. Эгерде $a_n = \left(e^{\arcsin 1/n} - 1\right)^{\alpha}$ болсо, анда (21) жыйналышын далилдегиле.

Δ Асимптоталык формула боюнча $t \to 0$ да $\arcsin t = t + 0(t^2)$, $e^t - 1 = t + 0(t)$, $e^{\arcsin t} - 1 = t + 0(t)$ барабардыктары орун алат. Анда $n \to \infty$ да $a_n \sim \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ катары жана (21) катар $\alpha > 1$ маанисинде жыйналат, ал эми $\alpha \leqslant 1$ маанисинде таралат. ▲

2-натыйжа. Эгерде (21) жана (25) катарлардын мүчөлөрү бардык $k \geqslant m$ үчүн

$$a_k > 0,\ b_k > 0,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k} \tag{26}$$

шарттарын канааттандырса, анда (25) катардын жыйналышынан (21) жыйналуучулугу, ал эми (21) катардын таралуучулугунан (25) таралуучулугу келип чыгат.

○ Натыйжадагы (26) шартка $k = m, m+1, \ldots, n-1$ маанилерди берип, тиешелүү барабарсыздыктарды көбөйтүп,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_{m+1}}{b_m} \cdot \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} \cdots \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

же

$$\frac{a_n}{a_m} \leqslant \frac{b_n}{b_m}$$

барабарсыздыгын алабыз. Мындан, бардык $n \geqslant m+1$ үчүн

$$a_n \leqslant A b_n, \quad \left(A = \frac{a_m}{b_m} > 0 \right)$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Акыркы барабарсыздыкка 2-теореманы колдонсок, натыйжа далилденет. ●

3. Даламбердин белгиси

3-теорема. *Бизге*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (27)$$

катары берилсин. Анда: а) Эгерде $q \in (0,1)$ *саны жана* m *номери табылып, бардык* $n \geqslant m$ *үчүн*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \qquad (28)$$

аткарылса, анда (27) катар жыйналат;

б) *Эгерде* m *номери аныкталып, бардык* $n \geqslant m$ *үчүн*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \qquad (29)$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда (27) катар таралат.

○ а) Алдыңкы (28) шартынан

$$a_{m+1} \leqslant q a_m, \quad a_{m+2} \leqslant q a_{m+1} \leqslant q^2 a_m$$

жана ошондуктан

$$a_{m+p} \leqslant q^p a_m, \ \forall p \in \boldsymbol{N}. \tag{30}$$

Катар $\sum_{p=1}^{\infty} q^p a_m (0 < q < 1)$ жыйналат (§1, мисалды кара) жана бардык $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн $a_n > 0$, анда 2-теорема боюнча

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p} \tag{31}$$

катары да жыйналат. Бул катарга чектүү сандагы $a_1, \dots, a_m$ мүчөлөрдү кошуп жазсак, (27) катарды алабыз. Демек, (27) катар жыйналат (§1, 3-п. 2-касиет).

б) (29) шарттан $a_{m+1} \geqslant a_m$, $a_{m+2} \geqslant a_{m+1} \geqslant a_m$, $a_{m+3} \geqslant a_m$ ж.б. Ошондуктан, бардык $p \in \boldsymbol{N}$ үчүн

$$a_{m+p} \geqslant a_m > 0. \tag{32}$$

Бул болсо $n \to \infty$ да $a_n \to 0$ (зарыл шарт орун албайт). Демек, (31) катар, аны менен бирге (27) катар таралуучу болот. ●

Натыйжа (Даламбердин белгисинин пределдик түрү). Эгерде

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \tag{33}$$

предели аныкталса, анда $\lambda < 1$ маанисинде (27) жыйналат, ал эми $\lambda > 1$ болсо, (27) катар таралуучу болот.

3-мисал. Даламбердин белгисин колдонуп, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ катарынын жыйналуучулугун далилдегиле, эгерде:

а) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; б) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Δ а) Катар жыйналат, себеби $n \to \infty$ да $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a}{n+1} \to 0$, б.а. (33) шарт орун алды $\lambda = 0$.

б) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-1}$, б.а. шарт $\lambda = e^{-1} < 1$ орун алгандыктан берилген катар жыйналат. ▲

4. Кошинин белгиси

4-теорема. *Бизге*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \forall n \in \boldsymbol{N} \text{ үчүн } a_n \geqslant 0 \tag{34}$$

катары берилсин. Анда: а) Эгерде $q \in (0,1)$ саны жана натуралдык номер m аныкталып, бардык $n \geqslant m$ үчүн

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant q \tag{35}$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда (34) катар жыйналат;

б) *Эгерде m номери аныкталып, бардык $n \geqslant m$ үчүн*

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

барабардыгы орун алса, анда (34) катар таралат.

○ а) Теоремадагы (35) шарт бардык $n \geqslant m$ үчүн $a_n < q^n$, $0 < q < 1$ шартына тең күчтүү. Анда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ (§1, мисалды кара) катары жыйналса, анда 3-теорема боюнча $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ катары да жыйналат.

б) Эгерде $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ болсо, анда бардык $n \geqslant m$ үчүн $a_n \geqslant 1$ жана ушунун негизинде (34) таралуучу катар. ●

Натыйжа (Кошинин белгисинин пределдик түрү).

Эгерде

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda \qquad (36)$$

предели аныкталса, анда $\lambda < 1$ болсо, (34) катар жыйналат, ал эми $\lambda > 1$ болсо, (34) катар таралуучу болот.

Эскертүү. 1. Эгерде (33) же (36) шарттар $\lambda = 1$ маанисинде орун алса, анда (34) катар жыйналышы да, таралышы да мүмкүн, б.а. Даламбердин (Кошинин) белгиси $\lambda = 1$ болсо, (34) катардын жыйналышы жөнүндөгү суроого жооп бербейт.

2. Алдыңкы (33) пределдин аныкталышынан (36) пределдин аныкталышы келип чыгат жана ал пределдер барабар. Ошондуктан, оң мүчөлүү катарларды изилдөөдө Кошинин белгиси Даламбердин белгисине караганда күчтүүрөөк.

4-мисал. Эгерде $a_n=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ болсо, (34) катардын жыйналышын далилдегиле.

Δ Мында

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}.$$

Анда $\lambda=\dfrac{1}{e}<1$ болуп, (36) шарт аткарылды.

Ошондуктан (34) катар жыйналат. ▲

5. Интегралдык белги

5-теорема. *Эгерде f функциясы $[1,+\infty)$ аралыгында оң мааниге ээ болуп жана кемүүчү болсо, анда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}f(k) \qquad (37)$$

жана интеграл

2*

$$J = \int_{1}^{\infty} f(x)dx, \tag{38}$$

же экөө тең жыйналат же экөө тең таралат.

○ Биз $\Delta_k = [k, k+1]$, $k \in \boldsymbol{N}$ жана $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ деп белгилейли. Шарт боюнча $x \geqslant 1$ маанисинде f кемүүчү функция, анда ал ар бир Δ_k кесиндилеринде интегралданат жана бардык $x \in \Delta_k$ үчүн $f(k+1) \geqslant f(x) \leqslant f(k)$ шартын канааттандырат. Мындан интегралдын касиети боюнча (VII гл. 1-бөлүк)

$$f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) \tag{39}$$

барабардыгын алабыз. Бул (39) барабарсыздыкка $k = 1,2,\ldots,n$ маанилерди берип, тиешелүү барабарсыздыктарды кошуп,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

же

$$S_{n+1} - f(1) \leqslant \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant S_n \tag{40}$$

барабарсыздыгын алабыз.

а) Эми (38) интеграл жыйналсын, б.а. чектүү

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_{1}^{\xi} f(x)dx = J$$

предели аныкталсын. Теореманын шартында бардык $\xi \in [1, +\infty)$ аралыгында f функциясы терс эмес, ошонун негизинде

$\int_{1}^{\xi} f(x)dx \leqslant J$, ошондуктан

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \to \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant J \tag{41}$$

барабарсыздыгы келип чыгат. Эми (40) жана (41) барабарсыздыктарынан

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \to S_{n+1} \leqslant f(1) + J$$

барабарсыздыгын, б.а. оң мүчөлүү (37) катардын айрым суммаларынан түзүлгөн удаалаштык жогору жагынан чектелгендигин билгизет. Анда 1-теореманын негизинде (37) катар жыйналат.

б) Тескерисинче, эгерде оң мүчөлүү (37) катар жыйналса жана суммасы S болсо, анда

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \to S_n \leqslant S \tag{42}$$

барабарсыздыгы орун алат. Демек, (40) жана (42)

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \to \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant S \tag{43}$$

келип чыгат. Эми ар кандай $\xi \geqslant 1$ үчүн $n \in \boldsymbol{N}$ ди $n+1 \geqslant \xi$ болгудай кылып тандап алууга болот. Анда, ар бир $x \geqslant 1$ үчүн $f(x) \geqslant 0$ шартын эске алсак, (43) барабарсыздыктан

$$\int_1^{\xi} f(x)dx \leqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant S$$

барабарсыздыгын алууга болот. Ошондуктан (38) интеграл жыйналат.

Эгерде (38) интеграл таралуучу болсо, анда (37) катар сөзсүз таралыш керек. Тескерисинче (37) катар жыйналса, анда жогорудагы далилдөөнүн негизинде (38) интеграл жыйналат. Ушундай эле, (37) катардын таралышынан (38) интегралдын таралуучулугу келип чыгат. ●

Эскертүү. Алдыңкы (38) интеграл өздүк эмес интеграл деп аталат. Ал жөнүндө X главанын 1-бөлүгүндө толук токтолобуз.

5-мисал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ катарынын $\alpha > 1$ маанисинде жыйналышын, ал эми $\alpha \leqslant 1$ болсо таралышын далилдегиле.

Δ Биз $\alpha > 0$ болсун деп $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ функциясын карайлы. Бул функция оң жана кемүүчү, ал эми $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ интегралы $\alpha > 1$ маанисинде жыйналат, $\alpha \leqslant 1$ болсо таралат. Ошондуктан 2-теорема боюнча берилген катар $\alpha > 1$ болсо, жыйналат, ал эми $\alpha \leqslant 1$ болсо, таралат.

Эгерде $\alpha \leqslant 1$ болсо, ал катар дагы таралуучу катар, анткени $n \to \infty$ да $\frac{1}{n^{\alpha}} \to 0$. ▲

6. Раабенин белгиси

6-теорема. *Эгерде*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda \tag{44}$$

предели аныкталса, анда $\lambda > 1$ маанисинде (34) катар жыйналат, ал эми $\lambda < 1$ болсо, таралуучу катар болот.

○ а) $\lambda > 1$ болсун, анда $\lambda = 1 + 3\alpha$ $(\alpha > 0)$. Теоремадагы (44) шартынан, n_1 номер аныкталып, бардык $n \geqslant n_1$ үчүн

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 + 2\alpha$$

же тең күчтөгү

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{1+2\alpha}{n} \tag{45}$$

барабарсыздыгы орун алат.

Эми n_2 номер аныкталып, бардык $n \geqslant n_2$ үчүн

$$1+\frac{1+2\alpha}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} \tag{46}$$

барабарсыздыгы орун аларын далилдейли. Ал үчүн

$$\varphi(x) = \ln(1+(1+2\alpha)x), \quad \psi(x) = (1+\alpha)\ln(1+x), \quad (x>0, \alpha>0)$$

функцияларын алсак, анда $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ жана

$$\varphi'(x) = \frac{1+2\alpha}{1+(1+2\alpha)x}, \quad \psi'(x) = \frac{1+\alpha}{1+x}.$$

Ал эми $\varphi'(x) > \psi'(x)$ барабарсыздыгы $x>0$ маанисинде

$$(1+x)(1+2\alpha) > (1+\alpha)(1+(1+2\alpha)x)$$

барабарсыздыгына тең күчтүү жана бул $x < \dfrac{1}{1+2\alpha}$ маанисинде аткарылгандыктан Лагранждын теоремасындагы 3-натыйжаны колдонсок, анда $x \in \left(0, \dfrac{1}{1+2\alpha}\right)$ аралыгында $\varphi(x) > \psi(x)$ келип чыгат. Мындан, эгерде $0 < x < \dfrac{1}{1+2\alpha}$ болсо, анда $e^{\varphi(x)} > e^{\psi(x)}$ же

$$1+(1+2\alpha)x > (1+x)^{1+\alpha}. \tag{47}$$

Эми n_2 номерин $n_2 > 1+2\alpha$ болгудай кылып тандап алсак, анда бардык $n \geqslant n_2$ үчүн (46) барабарсыздыгы орун алат жана аны (47) ден $x = \dfrac{1}{n}$ болгондо алабыз. Алдыңкы (45) жана (46) дан

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} = \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{n^{1+\alpha}}, \quad n \geqslant n_0 = \max(n_1, n_2),$$

же

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\dfrac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}}{\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}}. \tag{48}$$

Катар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$, $(\alpha > 0)$ жыйналуучу болгондуктан, (48) барабарсыздыкка 2-теоремадагы 2-натыйжаны колдонуп, (34) катардын жыйналышын далилдеген болобуз.

б) Эгерде $\lambda < 1$ болсо, анда n_0 номери аныкталып бардык $n \geqslant n_0$ үчүн

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 1 \quad \text{же} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1+\frac{1}{n}$$

барабарсыздыгы орун алат жана мындан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}. \tag{49}$$

Катар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ таралуучу болгондуктан (49) барабарсыздыкка 2-теоремадагы 2-натыйжаны колдонуп, (34) катардын таралышын далилдеген болобуз. ●

6-мисал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ катарынын жыйналышын изилдегиле. Бул катарга Даламбердин белгисин колдонсок, анда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

болуп, коюлган суроону чече албайбыз. Ошондуктан Раабенин белгисин колдонолу

$$\sigma_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right)$$

Биз $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ пределин билебиз. Анда $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\dfrac{1}{2}$.

Раабенин белгиси (6-теорема) боюнча $\lambda=\dfrac{1}{2}<1$. Демек, катар

таралат. ▲

§ 3. АБСОЛЮТТУУ ЖАНА ШАРТТУУ ЖЫЙНАЛУУЧУ КАТАРЛАР

1. Абсолюттуу жыйналуучу катарлар

Мүчөлөрү чыныгы же комплекстүү сандар болгон

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

катар берилсин жана бул катардан

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

катарын түзөлү. Эгерде (2) катар жыйналса, анда (1) катарды абсолюттуу жыйналуучу катар деп атайбыз.

Ушул абсолюттуу жыйналуучу катарлардын касиеттерине токтололу.

1^0. Эгерде катар абсолюттуу жыйналса, анда ал жыйналуучу катар.

○ Алдыңкы (2) катар жыйналсын, анда ага Кошинин шарты (§1. п.4) аткарылат, б.а.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon:\forall n\geqslant N_\varepsilon\ \ \forall p\in \boldsymbol{N}\to\ \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\varepsilon.$$

Ал эми

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|$$

болгондуктан (1) катарга да Кошинин шарты орун алат, демек, анда Кошинин критерийи боюнча (1) катар жыйналуучу болот. ●

2^0. Эгерде (1) катар абсолюттуу жыйналса, ал эми $\{b_n\}$ удаалаштыгы чектелсе, б.а.

$$\exists M > 0: \forall n \in \boldsymbol{N} \to |b_n| \leqslant M, \qquad (3)$$

анда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ катары абсолюттуу жыйналат.

○ Бул касиетти далилдөө үчүн жыйналуучу катарлар жөнүндө Кошинин критерийи жана (3) негизинде аткарылуучу

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k b_k| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

барабарсыздыгын пайдалануу жетиштүү. ●

3^0. Эгерде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ жана $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ катарлары абсолюттуу жыйналса, анда ар кандай λ жана μ үчүн

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$$

катары да абсолюттуу жыйналат.

○ Бул касиетти далилдөө үчүн Кошинин критерийин колдонуу жетиштүү. ●

4^0. Эгерде (1) катар абсолюттуу жыйналса, анда анын мүчөлөрүн орун алмаштыруу жолу менен түзүлгөн

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j \qquad (4)$$

катар дагы абсолюттуу түрдө жыйналат жана (4) катардын суммасы $\tilde{S}$ (1) катардын суммасы S ке барабар.

○ а) Алды менен (4) катардын абсолюттуу жыйналышын, б.а.

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{a}_j| \tag{5}$$

катарынын жыйналышын далилдейли. (4) катар (1) катардан мүчөлөрүнүн жайланыш тартиби боюнча айырмаланат, анда

$$\forall j\in \boldsymbol{N}\ \exists k_j\in \boldsymbol{N}: a_{k_j}=\tilde{a}_j.$$

Биз $\tilde{\sigma}_n=\sum_{j=1}^{n}|\tilde{a}_j|$, $\tilde{n}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}k_j$ белгилейли, анда $n\leqslant\tilde{n}$ жана бардык $n\in\boldsymbol{N}$ үчүн

$$\tilde{\sigma}_n\leqslant\sum_{k=1}^{\tilde{n}}|a_k|\leqslant A$$

барабарсыздыгы аткарылат (А — саны (2) катардын суммасы). Мындан, §2, 1-теорема боюнча (5) жыйналышы келип чыгат. Анда биринчи касиет боюнча (4) катар да жыйналат.

б) Эми суммалары

$$S=\tilde{S} \tag{6}$$

барабар экендигин далилдейли. Алдыдагы (1) жана (2) катарлардын жыйналуучулугунан, ар кандай $\varepsilon>0$ санына ылайык $N=N_\varepsilon$ номери табылып, бардык $n\geqslant N_\varepsilon$ жана бардык $p\in\boldsymbol{N}$ үчүн

$$\left|S-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{7}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

барабарсыздыктары орун алат. Эми (1) катардын $a_1,a_2,\ldots,a_N$ мүчөлөрүнүн (4) катарда болгон номерлеринин ичинен эң чоңун $\tilde{N}$, б.а. $\tilde{N}=\max(j,\ldots,j_N)$ $(a_k=\tilde{a}_{jk},k=\overline{1,N})$ белгилесек, анда

$$N \leqslant \tilde{N}. \tag{9}$$

Жогорку (4) катардын n-айрым суммасын $\tilde{S}_n$ менен белгилеп, бардык $n > N$ үчүн

$$\left|\tilde{S} - S\right| < \varepsilon, \tag{10}$$

аткарыларын көрсөтөлү. Ар кандай $n > \tilde{N}$ учурунда $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k$ сумма (1) катардын $a_1, \ldots, a_N$ мүчөлөрүн камтыгандыктан, $\tilde{N}$ санынын табылышы боюнча ((9) барабарсыздык),

$$\Delta = \tilde{S}_n - S_N = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k - \sum_{k=1}^{N} a_k, \; n > \tilde{N} \tag{11}$$

айрым (1) катардын N чоң болгон номерлүү мүчөлөрдү камтышы мүмкүн. Дагы, (1) катарда болгон (4) катардын $\tilde{S}_n$ ге кирген мүчөлөрүнүн номерлеринин ичинен эң чоңун N', б.а. $N' = \max(k_1, \ldots, k_n)$ $(a_{kj} = \tilde{a}_j, \; j = 1, \ldots, n)$ менен белгилесек, анда

$$N' = N + p, \; p \in \mathbf{N}$$

болот. Ошондуктан (11) айрым номерлери N чоң болгон, бирок $N' = N + p$ ашпаган (1) катардын мүчөлөрүнүн суммасынан түзүлөт. Демек, (8) шарттын негизинде

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=N+1}^{N+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Ал эми $S - \tilde{S}_n = S - S_N - (\tilde{S}_N - S_N) = S - S_N - \Delta$ барабарсыздыгынан жана (7), (12) негизинде бардык $n \geqslant \tilde{N}$ үчүн (10) барабарсыздык орун алат. Бул болсо, $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{S}_n = S$ экендигин, б.а. (6) барабардык орун алгандыгын далилдейт. ●

2. Белгиси кезектешме катарлар

Белгиси кезектешме катарлар деп

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n > 0, \quad \forall n \in \boldsymbol{N} \tag{13}$$

түрүндөгү катарды айтабыз.

1-теорема (Лейбництин белгиси). *Эгерде* $\{a_n\}$ *удаалаштык монотондуу нөлгө умтулса, б.а.*

$$a_n \geqslant a_{n+1} \quad \text{бардык} \quad n \in \boldsymbol{N}, \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{15}$$

анда (13) белгиси кезектешме катар жыйналат.

○ Биз $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ белгилесек, анда (14) барабарсыздыктын негизинде $S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2}$, б.а. $\{S_{2n}\}$ өсүүчү удаалаштык. Экинчи жактан

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n}) < a_1,$$

анткени, бардык n үчүн $a_n > 0$ жана $\{a_n\}$ кемүүчү удаалаштык ((14) шарт боюнча). Өсүүчү жана жогору жагынан чектелген удаалаштыктын чектүү предели аныкталышы жөнүндөгү теорема боюнча $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Мындан жана (15) шарттан $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ келип чыгат, б.а. (13) катар жыйналат. ●

Натыйжа. Белгиси кезектешме (13) катарга, бардык $n \geqslant N$ үчүн,

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1} \tag{16}$$

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1} \tag{17}$$

барабарсыздыктар орун алат.

○ Сөзсүз $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$ болорун жана мындан, (14) шарттын негизинде, $S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$ болорун, б.а. $\{S_{2n-1}\}$ кемүүчү удаалаштык экендигин көрөбүз. Ал эми S өсүүчү $\{S_{2n}\}$ удаалаштыгынын да кемүүчү $\{S_{2n-1}\}$ удаалаштыгынын да предели болгондуктан (16) барабарсыздык орун алат жана аны

$$S_{2n-1} - a_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n} + a_{2n+1}$$

түрүндө жазсак болот. Мындан, $S_{2n-1} - S \leqslant a_{2n}$, $S - S_{2n} \leqslant a_{2n+1}$. Бул бардык $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн (17) барабарсыздыктын аткарылышын далилдейт. ●

1-мисал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ катарынын жыйналышын далилдегиле.

△ Мында $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ $(\alpha > 0)$ удаалаштык монотондуу нөлгө умтулат, анда 1-теорема боюнча катар жыйналат. Айрым учурда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

катары да жыйналат жана S суммасына, $n = 1$ үчүн (16) барабарсыздыктын негизинде, $\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant \frac{5}{6}$ чамалоо туура келет.

3. Жыйналуучу катарлар жөнүндө Дирихленин жана Абелдин белгилери

2-теорема (Дирихленин белгиси). *Катар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \qquad (18)$$

жыйналат, эгерде $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *катарынын айрым суммаларынан түзүлгөн удаалаштык чектелсе, б.а.*

$$\exists M > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} \to \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leqslant M, \tag{19}$$

ал эми $\{a_n\}$ *удаалаштыгы монотондуу нөлгө умтулса, б.а.*

$$a_{n+1} \leqslant a_n, \ \ \forall n \in \boldsymbol{N} \tag{20}$$

же

$$a_{n+1} \geqslant a_n, \ \ \forall n \in \boldsymbol{N} \tag{20'}$$

жана

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{21}$$

○ Биз адегенде (18) катарга Кошинин шарты аткарыларын көрсөтөлү.

Ал үчүн

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \tag{22}$$

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k a_k, \ \ n \in \boldsymbol{N}, \ \ p \in \boldsymbol{N} \tag{23}$$

белгилөөлөрүн алалы. Эми σ суммасын өзгөртүп түзөлү, анткени $k > 1$ үчүн $b_k = B_k - B_{k-1}$ экендигин эске алсак ((22) формула боюнча), анда

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1},$$

мындан

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k + a_{n+1} B_n.$$

Ошондуктан

$$\sigma = a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1})B_k. \qquad (24)$$

Эгерде (20) барабарсыздык орун алса, анда (24) формуладан, (19) шартты эске алып,

$$|\sigma| \leqslant M\left(|a_{n+p}| + |a_{n+1}|\right) + M\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1}).$$

Мындан

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{n+p} \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+p}|.$$

Демек, бардык $n \in N$ жана бардык $p \in N$ үчүн

$$|\sigma| \leqslant 2M\left(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|\right) \qquad (25)$$

барабарсыздыгы орун алат.

Эгерде (20) шартын (20′) шартына алмаштырсак, анда (25) барабарсыздык өз күчүндө кала берет, анткени (21) шарттан

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |a_n| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (26)$$

барабарсыздыгын алабыз. Ошентип, (23), (25) жана (26) барабарсыздыктардан

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \;\; \forall p \in N \to \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon$$

Кошинин шарты келип чыгарын көрөбүз. Демек, берилген катар жыйналат. ●

1-эскертүү. Дирихленин белгисине $b = (-1)^{n+1}$ десек, Лейбництин белгиси келип чыгат. Ал эми (23) сумманы (24) түргө өзгөртүп түзүүнү Абелдин өзгөртүп түзүүсү деп айтабыз.

2-мисал. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ катарынын бардык $x \in R$ маанилеринде жыйналышын далилдегиле, эгерде $\{a_n\}$ удаалаштыгы (20), (21) шарттарды канааттандырса.

Δ Эгерде $x = 2\pi m$ $(m \in Z)$ болсо, анда берилген катардын бардык мүчөлөрү нөл жана ошондуктан, ал катар жыйналат.

Эми $x \neq 2\pi m$ болсун. Анда $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ белгилеп,

$B_n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ формуласын пайдалансак, $|B_n(x)| < \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

барабарсыздыгын бардык $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн алабыз. Бул $\{B_n(x)\}$ удаалаштыгы чектелгендигин билгизет. Анда 2-теореманын негизинде берилген катар $x \neq 2\pi m$ маанисинде жыйналат. Демек, берилген катар ар кандай $x \in \boldsymbol{R}$ маанилеринде жыйналат. Айрым учурда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^{\alpha}}, \quad (\alpha > 0)$$

катары дагы ар кандай $x \in \boldsymbol{R}$ маанилеринде жыйналат. ●

3-теорема (Абелдин белгиси).

Эгерде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{27}$$

катары жыйналса, ал эми $\{a_n\}$ *удаалаштыгы, б.а. (20) же (20′) шартты канааттандырса жана чектелген болсо, катар (18) жыйналат.*

○ Монотондуу удаалаштыктын пределинин болушу жөнүндөгү теорема боюнча $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, мындан $\{a_n - a\}$ удаалаштыгы нөлгө монотондуу умтулаары келип чыгат. Ал эми (27) катардын жыйналышынан анын айрым суммаларынан түзүлгөн $\{B_n\}$ удаалаштык чектелген. Ошондуктан, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ катары да Дирихленин белгиси боюнча жыйналат. Мындан жана (27) катардын жыйналышынан (18) катар жыйналат деген жыйынтык чыгарабыз, анткени $a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n$.●

3-мисал. Эгерде

$$a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n}\ln(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

болсо, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ катарынын жыйналышын далилдегиле.

Δ Катар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n}\ln(n+1)}$ жыйналат (2-мисал сыяктуу далилденет), ал эми $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$ удаалаштыгы монотондуу жана чектелген. Ошондуктан Абелдин белгиси боюнча $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ катары да жыйналат. ▲

4. Шарттуу жыйналуучу катарлар

Эгерде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{28}$$

жыйналса, ал эми

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{29}$$

катары таралуучу болсо, анда (28) катарды шарттуу жыйналуучу катар деп айтабыз.

4-теорема (Риман). *Эгерде (28) катар шарттуу жыйналуучу болсо, анда мурдатан кандай гана L (чектүү же $+\infty, -\infty$ символдордун бири) санын албасак дагы (28) катардын мүчөлөрүнүн, анын суммасы так ошол L санына барабар болгудай кылып орундарын алмаштырууга болот.*

○ Биз адегенде L чектүү сан болсун деп, (28) катардын оң мүчөлөрүнөн $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, терс мүчөлөрүнөн $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ мүчөлөрүн бөлүп алабыз. Шарт боюнча (28) жыйналуучу болгондуктан анын a_n мүчөсүнүн абсолюттук чоңдугу $|a_n|$ өзү $n \to \infty$ да нөлгө умтулат. Ошондуктан $n \to \infty$ да b_n жана c_n мүчөлөрү дагы нөлгө умтулушат.

Эми оң жана терс мүчөлөрүнөн $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ жана $-c_1 - c_2 - \ldots - c_n - \ldots$ катарларын түзсөк, анда бул катарлар жыйналбоочу катарлар болушат. Мындагы оң мүчөлөрдөн алардын суммасы чектүү L санынан ашып кеткиче алабыз:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} > L.$$

Мындай барабарсыздыкка жетишүүгө болот, анткени ал катар жыйналбоочу катар. Эми терс мүчөлөрдөн кошуп отуруп жалпы сумма L ден кичине болору менен токтотобуз:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{l_1} < L.$$

Андан кийин, пайдаланыла элек оң мүчөлөрдү кошуп отуруп, жалпы сумма L ден чоң болору менен токтотобуз:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{l_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_{1+2}} > L.$$

Кайрадан терс мүчөлөрүнүн калгандарын кошуп, жалпы сумма L ден кичине болору менен токтотобуз:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{l_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} - c_{l_1+1} - \ldots - c_{l_2} < L.$$

Ушул процессти чексиз уланта берсек, анда түзүлгөн жалпы сумма бирде L ден чоң, бирде L ден кичине болуп ага өтө жакындап, L дин айланасында термеле берет жана b_n, c_n $n \to \infty$

3*

да нөлгө умтулгандыктан бул термелүү барган сайын кичирее берет да акыры нөлгө умтулат, б.а. жалпы сумманы L ге барабарлоого болот.

Эми $L=+\infty$ болсун. Оң мүчөлөрдөн түзүлгөн катар жыйналбоочу болгондуктан анын суммасы $+\infty$ ге умтулары ачык. Ошондуктан, оң мүчөлөрдүн бир нечесин алып, ага бир терс мүчө кошуп, кайра бир нече оң мүчө алып, ага бир терс мүчө кошуп, бул процессти уланта берсек, жалпы сумма $+\infty$ ге умтулары шексиз. Ал эми, эгерде $L=-\infty$ болсо, тескерисинче топтоо аркылуу суммасы $-\infty$ боло турган катарды оңой эле түзүүгө болот. Демек, теорема толук далилденди. ●

Бул теоремадан, шарттуу жыйналуучу катардын суммасы анын мүчөлөрүнүн иретинен көз каранды деген жыйынтык чыгарууга болот.

4-мисал. Шарттуу жыйналуучу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \tag{30}$$

катарын алып, теореманын шартын текшерип көрөлү.

△ Бул (30) катардын мүчөлөрүн төмөнкүчө топтойлу: биринчи мүчөсүнөн баштап бир оң мүчөсүн алып, андан кийин эки терс мүчөсүн жазабыз, кайрадан бир оң мүчө, эки терс мүчө алып, аларды катары менен жазып жүрүп отурабыз,

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots \tag{31}$$

Мындайча орун алмаштыруудан берилген (30) катардын суммасы эки эсе азаят. Чындыгында эле (31) катардын ар бир үч мүчөсүн бир топтоп, ал топтордун ар биринин биринчи мүчөсүнөн экинчи мүчөсүн кемитсек, ар бир топтоодо экиден мүчө болгон

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots$$

катарына ээ болобуз. Ал эми $\frac{1}{2}$ ди кашаадан чыгарсак,

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots\right]$$

катарын алабыз да (30) катар менен салыштырып, акыркы катар (30) катардан эки эсе кичине экендигине ишенебиз. ▲

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Катарлардын суммасын тапкыла:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$ Ж о о б у. $S=1$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$ Ж о о б у. $S=1$.

2. Катарлардын жыйналышын аныктагыла:

а) $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots;$ Ж о о б у. Жыйналат.

б) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots;$ Ж о о б у. Абсолюттуу жыйналат.

в) $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\ldots+\frac{n}{5^{n-1}}+\ldots;$ Ж о о б у. Жыйналат.

г) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$. Ж о о б у. Жыйналат.

3. Катарлардын абсолюттуу жана шарттуу жыйналуучулугун аныктагыла:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}};$ Ж о о б у. $p>1$ маанисинде абсолюттуу, $0<p\leqslant 1$ маанисинде шарттуу жыйналат.

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

Ж о о б у. $p>1$ **маанисинде абсолюттуу,** $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ **маанисинде шарттуу жыйналат.**

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\,n^q}$ катарынын:

а) Абсолюттуу жыйналуу областын; б) шарттуу жыйналуу областын аныктагыла.

Ж о о б у. а) $q>p+1$;

б) $p<q\leqslant p+1$.

IX глава

ФУНКЦИОНАЛДЫК КАТАРЛАР

§ 1. ФУНКЦИОНАЛДЫК УДААЛАШТЫКТАРДЫН ЖАНА КАТАРЛАРДЫН БИР КАЛЫПТА ЖЫЙНАЛЫШЫ

1. Функционалдык удаалаштыктардын жана катарлардын жыйналышы

а) Функциялардын удаалаштыгынын жыйналышы. Бизге $f_n(x)$ функциясы берилип $n \in N$, ал E көптүгүндө аныкталсын жана $x_0 \in E$. Эгерде $\{f_n(x_0)\}$ сан удаалаштыгы жыйналса, анда $\{f_n(x)\}$ функциялардын удаалаштыгы x_0 чекитинде жыйналат деп айтышат.

Ар бир $x \in E$ чекитинде жыйналуучу $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгын жөн эле E көптүгүндө жыйналуучу удаалаштык деп айтабыз. Ушул учурда E көптүгүнөн $f(x)$ функциясы аныкталып, анын $x_0 \in E$ чекитиндеги мааниси $\{f_n(x_0)\}$ удаалаштыгынын пределине барабар болот. Бул функцияны $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгынын пределдик функциясы деп айтабыз да

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E, \tag{1}$$

же кыскача

$$f_n \underset{E}{\to} f$$

түрүндө жазабыз.

1-мисал. $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгынын E көптүгүндө пределдик $f(x)$ функциясын тапкыла, эгерде:

а) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2}$; б) $f_n(x) = n\sin\dfrac{1}{nx}$.

Δ а) $f_n(x) = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n}}$ болгондуктан, $f(x)=1$;

б) асимптотикалык $\sin t \sim t$ формуланы колдонуп, $n \to \infty$ да $n\sin\dfrac{1}{nx} \sim n\dfrac{1}{nx}$ ти алабыз. Эгерде $x \neq 0$ болсо, анда $f(x) = \dfrac{1}{x}$. ▲

б) Функционалдык катардын жыйналышы. Эми $U_n(x)$, $n \in N$ функциясы E көптүгүндө аныкталсын жана ар бир $x \in E$ үчүн $\{S_n(x)\}$ удаалаштыгына чектелген предел аныкталсын, мында $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$. Анда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{2}$$

катары E көптүгүндө жыйналуучу катар болот.

Эгерде $S(x)$ функциясы $\{S_n(x)\}$ удаалаштыгынын E көптүгүндө пределдик функциясы болсо, б.а.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in E$$

анда $S(x)$ функциясы (2) функционалдык катардын суммасы деп, аны

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{(n)}(x), \quad x \in E$$

түрүндө жазабыз.

Мисалы, эгерде $U_n(x) = x^{n-1}, E = (-1,1)$ болсо, анда $S_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Эгерде ар бир $x \in E$ үчүн $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n(x)|$ катары жыйналса, анда (2) катары E көптүгүндө абсолюттуу жыйналат деп айтышат.

2. Функционалдык удаалаштыгынын бир калыпта жыйналышы

а) Функционалдык удаалаштыгынын бир калыпта жыйналышы жөнүндө түшүнүк.

Аныктама. *Функционалдык* $\{f_n(x)\}$ *удаалаштыгы үчүн*

$$\forall\varepsilon > 0\exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \forall x \in E \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad (3)$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда ал удаалаштыкты E көптүгүндө $f(x)$ функциясына бир калыпта жыйналат деп айтабыз жана аны

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E$$

же кыскача

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$$

түрүндө жазабыз. Бул аныктамада N_ε номери x тен көз каранды эместигин дайыма эске тутуу зарыл.

Ошентип, эгерде (3) шартты канааттандыра турган $f(x)$ функциясы аныкталса, анда $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгы E көптүгүндө бир калыпта жыйналат.

Ал эми $\{a_n\}$ сан удаалаштыгы жана n_0 номери аныкталып,

$$\forall n > n_0, \ \forall x \in E \to |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$$

барабарсыздыгы аткарылсын, бирок $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болсун. Анда

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E.$$

2-мисал. $\{f_k(x)\}$ удаалаштыгынын E көптүгүндө бир калыпта жыйналышын далилдегиле жана пределдик $f(x)$ функциясын тапкыла, эгерде: а) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2}$, $E = [-1,1]$, б) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} n^2 x}{\sqrt[3]{n+x}}$, $E = [0,+\infty)$.

Δ а) Бул учурда $f(x)=1$ (1-мисал, а)) жана $|f_n(x)-f(x)|=$
$=\dfrac{1-x^2}{n+x^2}\leqslant\dfrac{1}{n}$, себеби $|x|\leqslant 1$.

Ошондуктан,

$$\frac{n+1}{n+x^2}\rightrightarrows 1,\quad x\in[-1,1].$$

б) Мында $0\leqslant \operatorname{arctg} n^2x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ жана $\sqrt[3]{n+x}\geqslant\sqrt[3]{n}$ $(x\geqslant 0$ үчүн),

анда $0\leqslant f_n(x)\leqslant\dfrac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}$. Мындан $f_n(x)\rightrightarrows 0,\ x\in E$. ▲

б) Функционалдык удаалаштыгынын бир калыпта жыйналышынын критерийи.

1-теорема. *E көптүгүндө аныкталган $\{f_n(x)\}$ функциялардын удаалаштыгы ушул көптүктөгү $f(x)$ функциясына бир калыпта жыйналыш үчүн*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0 \tag{4}$$

барабардыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ Биз $\sigma_n=\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|$ белгилейли, анда (4) шарт

$$\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon:\forall n\geqslant n_\varepsilon\to\sigma_n<\varepsilon \tag{5}$$

шартына тең күчтүү.

Эгерде $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in E$, болсо, анда $\forall\varepsilon>0\exists N_\varepsilon:\forall n\geqslant N_\varepsilon\to$ $\to|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$ барабарсыздыгы аткарылат жана мындан $\sigma_n<\dfrac{\varepsilon}{2}$ барабарсыздыгы бардык $n\geqslant N_\varepsilon$ үчүн келип чыгат. Ошондуктан $\sigma_n<\varepsilon$ барабарсыздыгы бардык $n\geqslant n_\varepsilon=N_\varepsilon$ үчүн орун алат. Тескерисинче, эгерде (4) жана ага тең күчтүү (5) шарт аткарылса, анда $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\sigma_n$ барабарсыздыгын колдонуп, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы $x\in E, n\geqslant n_\varepsilon$ үчүн алабыз, б.а.

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x). \quad \bullet$$

3-мисал. $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгынын E көптүгүндө бир калыпта жыйналышын далилдегиле жана $f(x)$ пределдик функциясын тапкыла, эгерде:

а) $f_n(x)=\dfrac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}$, $\alpha>4$, $E=\boldsymbol{R}$;

б) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $E=[0,1]$.

Δ а) Эгерде $x=0$ болсо, анда $f_n(0)=0$ бардык $n\in \boldsymbol{R}$ үчүн жана $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=f(0)=0$. Ал эми $x\neq 0$ болсо, анда $|f_n(x)|\leqslant \dfrac{2n^2|x|}{n^\alpha x^2}=$

$=\dfrac{2}{|x|n^{\alpha-2}}$, мындан $n\to\infty$ да $f_n(x)\to 0$, себеби $\alpha>4$.

Ошентип, бул учурда пределдик функция $f(x)=0$, $n\in \boldsymbol{R}$. Себеби $x\neq 0$ учурунда $1+n^\alpha x^2\geqslant 2n^{\frac{\alpha}{2}}|x|$, бирок барабарсыздык $n^\alpha x^2=1$, б.а. $|x|=n^{-\frac{\alpha}{2}}$ болсо эле барабардыкка айланат, анда

$$\left|f_n(x)-f(x)\leqslant \frac{2n^2|x|}{2n^{\alpha/2}|x|}\right|=\frac{1}{n^{\alpha/2-2}}, x\neq 0.$$

Ошондуктан, $\sup|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{1}{n^{\alpha/2-2}}\to 0$, $n\to\infty$ да жана $f_n(x)\rightrightarrows 0$, $x\in \boldsymbol{R}$.

б) Эгерде $x\in[0,1)$ болсо, анда $n\to\infty$, да $x^n\to 0$ жана ошондуктан, $n\to\infty$ да $f_n(x)\to 0$. Эгерде $x=1$ болсо, анда $f_n(1)=0$, демек, $f(1)=0$. Ошентип, $f(x)=0$, $x\in[0,1]$. Эми $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=$

$= \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)|$ эсептейли. Ал үчүн $f_n(x)$ функциясынын экстремумун аныктайлы.

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - x(n+1)) = 0$$

теңдемеси $[0,1]$ сегментинде жалгыз $x_n = \frac{n}{n+1}$ чыгарылышка ээ жана $f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$. Эми $x \in (0, x_n)$де $f_n'(x) > 0$ жана $x \in (x_n,\ 1)$де $f_n'(x) < 0$. Ошондуктан,

$$\sup_{x\in E} f_n(x) = \max_{x\in E} f_n(x) = f_n(x_n) < \frac{1}{n}$$

бардык $n\in \boldsymbol{N}$ үчүн жана 1-теореманын негизинде $f_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in [0,1]$. ▲

2-теорема (удаалаштыктын бир калыпта жыйналышы жөнүндө Кошинин критерийи).

Функциялардын $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгы E көптүгүндө бир калыпта жыйналыш үчүн Кошинин шарты (III гл. 1-бөлүк):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall p\in \boldsymbol{N}, \forall x \in E \to \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ **Зарыл шарты.** $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E$ бир калыпта жыйналсын. Анда бир калыпта жыйналуунун аныктамасы боюнча

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall k \geqslant N_\varepsilon\ \forall x \in E \to \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

барабарсыздыгы орун алат. Айрым учурда, $n \geqslant N_\varepsilon$ үчүн $k = n$, $p\in \boldsymbol{N}$, $k = n + p$ маанилерде да (7) аткарылат, б.а.

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

мындан

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| = \left|\left(f_{n+p}(x) - f(x)\right) - \left(f_n(x) - f(x)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Демек, (6) шарт аткарылат.

Жетиштүү шарты. Биз E көптүгүнөн турактуу x_0 чекитин алсак, анда $\{f_n(x_0)\}$ сан удаалаштыгы (6) Кошинин шартын канааттандырат жана сан удаалаштыгынын жыйналышы жөнүндөгү Кошинин критерийи (VIII гл., §1, 4-п) боюнча чектелген

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \tag{8}$$

предели аныкталат. Ал эми (8) предел ар бир $x_0 \in E$ үчүн аныкталгандыктан E көптүгүндө $f(x)$ функциясы аныкталат жана ал $\{f_n(x)\}$ удаалаштыгынын пределдик функциясы болот.

Эми Кошинин (6) шартын

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall x \in E \to \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

түрүндө жазып алып, $p \to \infty$ да (ар бир турактуу $n \geqslant N_\varepsilon$ жана турактуу $x \in E$) пределге өтсөк, $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ пределин эске алып,

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

барабарсыздыгын бардык $n > N_\varepsilon$ жана ар бир $x \in E$ үчүн алабыз. Бул болсо $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ти билгизет. ●

3. Функционалдык катардын бир калыпта жыйналуучулугунун аныктамасы жана критерийи

Биз $U_x(x)$, $n \in N$ функциялары E көптүгүндө аныкталсын жана

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) \tag{10}$$

белгилейли.

Аныктама. *Эгерде E көптүгүндө $S(x)$ функциясы аныкталып,*

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), \; x \in E \tag{11}$$

шарты аткарылса, анда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{12}$$

функционалдык катарын E көптүгүндө бир калыпта жыйналат деп айтабыз.

Функциялардын удаалаштыгынын бир калыпта жыйналуучу аныктамасына ылайык, (11) шартты

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \; \forall x \in E \to |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \tag{13}$$

түрүндө жазабыз, мында $S(x)$ функциясы (12) катардын суммасы, $S_n(x)$ болсо (10) боюнча аныкталат.

Эми $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, б.а. $r_n(x)$ — (12) катардын n-мүчөсүнөн кийинки калдыгы. Анда (11) шарт

$$r_n(x) \rightrightarrows 0, \; x \in E$$

түрүндө жазылат. Бул болсо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \; \forall x \in E \to |r_n(x)| < \varepsilon \tag{14}$$

барабарсыздыгы менен тең күчтө. Анда 1-теорема боюнча, (12) катар E көптүгүндө бир калыпта жыйналыш үчүн $n \to \infty$ да

$$\sup_{x \in E} |r_n(x)| \to 0 \tag{15}$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Эгерде (12) катар E көптүгүндө жыйналса, бирок (14) шарт же ага тең күчтөгү (15) орун албаса, анда (12) катар E көптүгүндө бир калыпта эмес жыйналат.

4-мисал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ катарынын $E_1(-q,q)$, $O \leqslant q \leqslant 1, E_2(-1,1)$ көптүктөрүндө жыйналышын жана бир калыпта жыйналышын далилдегиле.

Δ Мында $S_n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ар кандай $x \in E_2$ үчүн, б.а. катар E_2 көптүгүндө ошону менен бирге эле E_1 көптүгүндө жыйналат.

Ар кандай $x \in E_1$ үчүн $|r_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{1-x}\right| \leqslant \dfrac{|x|^n}{1-|x|}$ барабарсыздыгы аткарылат жана мындан $\sup\limits_{x \in E_1} |r_n(x)| \leqslant \dfrac{q^n}{1-q}$, ошондуктан (15) шарт аткарылат. Демек, катар E_1 көптүгүндө бир калыпта жыйналат. E_2 көптүгүндө жыйналуусу бир калыпта эмес, себеби $\tilde{x} = 1 - \dfrac{1}{n}$ маанисин алсак, анда $\tilde{x} \in E_2$ ар кандай $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн жана $n \to \infty$ да

$$r_n(\tilde{x}) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to +\infty. \ \blacktriangle$$

3-теорема (катардын бир калыпта жыйналышы жөнүндөгү Кошинин критерийи). *(12) катар E көптүгүндө бир калыпта жыйналыш үчүн Кошинин*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \boldsymbol{N}\ \forall x \in E \to \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)\right| < \varepsilon \qquad (16)$$

шарты аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ Аныктама боюнча (12) катардын E көптүгүндө бир калыпта жыйналышы $\{S_n(x)\}$ удаалаштыгынын E көптүгүндө бир калыпта жыйналышы менен тең күчтө.

Алдыңкы, 2-теорема боюнча E көптүгүндө $S_n(x) \rightrightarrows S_x$ шарты качан гана

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall p \in \boldsymbol{N} \; x \in E \to \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \qquad (17)$$

барабарсыздыгы орун алганда аткарылат. Мында $S_{n+p}(x) - S_n(x) = U_{n+1}(x) + \ldots + U_{n+p}(x)$ болгондуктан (17) менен (16) шарттар тең күчтө. ●

Эгерде

$$\forall\varepsilon_0 > 0 \exists n_0 \in \boldsymbol{N} : \forall n \geqslant n_0 \; \exists x_n \in E \to \left|U_n(x_n)\right| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (18)$$

шарты аткарылса, анда (12) катар E көптүгүндө бир калыпта эмес жыйналат. ●

5-мисал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} e^{-\frac{n^2}{x}}$ катары $E = (0; +\infty)$ көптүгүндө бир калыпта эмес жыйналышын далилдегиле.

△ Эгерде $x_n = n^2$ деп алсак, анда $U_n(x_n) = e^{-1}$, б.а (18) шарт орун алды. Демек, жыйналуу бир калыпта эмес. ▲

4. Функционалдык катардын бир калыпта жыйналуу белгиси

4-теорема (Вейерштрасстын белгиси). *Эгерде (12) функционалдык катарга жыйналуучу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сан катары аныкталып бардык $n \geqslant n_0$ жана бардык $x \in E$ үчүн*

$$\left|U_n(x)\right| \leqslant a_n \qquad (19)$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда (12) катар E көптүгүндө абсолюттуу жана бир калыпта жыйналат.

○ Теоремадагы (19) шартка ылайык ар кандай $n \geqslant n_0$, ар бир $p \in \boldsymbol{N}$ жана бардык $x \in E$ үчүн

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |U_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \tag{20}$$

барабарсыздык орун алат. Шарт боюнча $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ катары жыйналгандыктан (§1, 4-п.), ага Кошинин шарты

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \ \forall p \in \boldsymbol{N} \to \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \tag{21}$$

аткарылат, ал эми (20) жана (21) ден (12) катарга E көптүгүндө Кошинин (16) шарты аткарылары жана 3-теорема боюнча бул катар E көптүгүндө бир калыпта жыйналышы келип чыгат.

Ал эми (12) катардын ар бир $x \in E$ үчүн абсолюттуу жыйналышы (20) нын оң жаккы барабарсыздыгынан көрүнүп турат. ●

Натыйжа. Эгерде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ катары жыйналса, мында $a_n = \sup_{x \in E} |U_n(x)|$, анда (12) катар E көптүгүндө абсолюттуу жана бир калыпта жыйналат.

6-мисал. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ катарынын E көптүгүндө бир калыпта жыйналышын далилдегиле, эгерде:

а) $U_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right), \quad E = [0,3];$

б) $U_n = x^2 e^{-nx}, \ \ E = (0,+\infty).$

Δ a) Мында $t \geqslant 0$ үчүн $\ln(1+t) \leqslant t$ аткарылгандыктан $|U_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{n\sqrt[3]{n+1}} \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}$ бардык $x \in [0,3]$ үчүн жана $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^{3/2}}$ катарынын жыйналышынан 4-теорема боюнча $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ катары $E=[0,3]$ көптүгүндө бир калыпта жыйналат.

б) $(0,+\infty)$ аралыгында $U'_n(x) = xe^{-nx}(2-nx) = 0$ теңдемеси жалгыз $x = x_n = \dfrac{2}{n}$ чыгарылышка ээ жана $x \in (0, x_n)$ үчүн $U'_n(x) < 0$, ал эми $x > x_n$ үчүн $U'_n(x) > 0$. Ошондуктан $\sup\limits_{x \in E} |U_n(x_n)| = U_n(x_n) = \dfrac{4}{n^2} e^{-2}$ жана $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2} e^{-2}$ катарынын жыйналышынан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ катарынын E көптүгүндө бир калыпта жыйналышы келип чыгат. ▲

5. Бир калыпта жыйналуучу катарлардын касиеттери

а) Бир калыпта жыйналуучу катарлардын суммасынын үзгүлтүксүздүгү.

5-теорема. *Эгерде: 1) (12) катардын бардык мүчөлөрү $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функциялар болушса;*

2) (12) *катар $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйналса, анда анын суммасы $S(x)$ да $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болот.*

○ Биз $[a,b]$ сегментинен каалагандай x_0 чекитин алалы. Анығыраак болуш үчүн $x_0 \in (a,b)$. Эми

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

функциясынын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болорун далилдейли, б.а.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \to |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon, \tag{22}$$

мында

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b].$$

Шарт боюнча

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ x \in [a,b], S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x), \text{ б.а.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \forall x \in [a,b] \to |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Ушул (23) барабарсыздыкка $n = n_0$ туруктуу маани берсек,

$$|S(x) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{24}$$

жана айрым учурда, $x = x_0$ болсо,

$$|S(x_0) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{25}$$

барабарсыздыктары орун алат. Эми $S_{n_0}(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз, анткени ал үзгүлтүксүз $U_k(x), k = 1, \ldots, n_0$ функциялардын суммасынан турат. Анда аныктама боюнча

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \subset [a,b] \to |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Биз,

$$S(x) - S(x_0) = \left(S(x) - S_{n_0}(x)\right) + \left(S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right) + \left(S_{n_0}(x_0) - S(x_0)\right)$$

барабардыгын колдонуп, (24), (25) жана (26) барабарсыздыктардан

$$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$$

барабарсыздыгын алабыз, ар кандай $x \in U_\delta(x_0) \subset [a,b]$ үчүн. Бул (22) барабарсыздыктын максатын көрсөтөлү. Мында x_0 чекит $[a,b]$ сегментинин каалагандай чекити болгондуктан $S(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болот. ●

1-эскертүү. 5-теореманын негизинде анын шарттары толук аткарылганда,

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}U_n(x)$$

чексиз суммага мүчөлөп пределге өтүүгө болот.

б) Функционалдык катарды мүчөлөп интегралдоо.

6-теорема. *Эгерде: 1) (12) катардын бардык мүчөлөрү* $[a,b]$ *сегментинде үзгүлтүксүз болушса;*

2) (12) *катар* $[a,b]$ *сегментинде бир калыпта жыйналса, анда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x U_n(t)dt \tag{27}$$

катары $[a,b]$ *сегментинде бир калыпта жыйналат жана эгерде*

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x) \tag{28}$$

болсо, анда

$$\int_a^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x U_n(t)dt,\ x\in[a,b], \tag{29}$$

б.а. (28) катарды мүчөлөп интегралдоого болот.

○ Шарт боюнча (28) катар $[a,b]$ сегментинде $S(x)$ функциясына бир калыпта жыйналат, б.а. $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}U_k(x) \rightrightarrows S(x)$, $x\in[a,b]$. Бул болсо

$$\forall\varepsilon>0\exists N_\varepsilon:\forall n\geqslant N_\varepsilon\forall t\in[a,b]\to|S(t)-S_n(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (30)$$

барабарсыздыгынын орун аларын билгизет. Эми

$$\sigma(x)=\int_a^x S(t)dt,\quad \sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x U_k(t)dt,$$

(27) катардын айрым суммасы болсун.

Теореманын шарты боюнча $U_k(x)$, $k\in\mathbf{N}$, функциялары $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз, анда алар $[a,b]$ сегментинде интегралданууучу функциялар болушат. Ушундай эле $S(x)$ функциясы да $[a,b]$ сегментинде интегралданууучу функция, себеби ал $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз (5-теорема). Интегралдын касиетин пайдаланабыз:

$$\sigma_n(x)=\int_a^x\sum_{k=1}^{n}U_k(t)dt=\int_a^x S_n(t)dt.$$

Демек,

$$\sigma(x)-\sigma_n(x)=\int_a^x\bigl(S(t)-S(t)\bigr)\,dt.$$

Мындан, (30) негизинде

$$|\sigma(x)-\sigma_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^x dt=\frac{\varepsilon}{b-a}(x-a)\leqslant\varepsilon$$

жана бул барабарсыздык бардык $n\geqslant N_\varepsilon$ жана бардык $x\in[a,b]$ үчүн орун алат. Бул болсо (27) катар $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйнала тургандыгын жана (29) барабардык орун алгандыгын далилдейт. ●

2-эскертүү. Эгерде (29) формулага a нын ордуна c ны, x тин ордуна d ны, мында $a < c < d < b$ ны койсок деле, б.а. 6-теореманын бардык шарттары орун алса, анда (28) катарды каалагандай $[c,d] \subset [a,b]$ сегментинде мүчөлөп интегралдоого болот.

в) Функционалдык катарды мүчөлөп дифференцирлөө

7-теорема. *Эгерде: 1) $U_n(x)$, $n \in N$ функциялары $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо;*

2) Туундулардан түзүлгөн

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \tag{31}$$

катар $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйналса;

3) Ал эми

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{32}$$

катары жок дегенде бир $x_0 \in [a,b]$ чекитинде, б.а. катар

$$\sum_{n=1}^{\infty} U(x_0) \tag{33}$$

жыйналса, анда (32) катар $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйналат жана аны мүчөлөп дифференцирлөөгө болот, б.а.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x), \tag{34}$$

мында $S(x)$ функциясы (32) катардын суммасы, б.а

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x). \tag{35}$$

○ Теоремадагы (31) катардын суммасы $\tau(x)$ менен, б.а.

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \tag{36}$$

деп белгилейли. Анда 6-теорема боюнча (36) катарды мүчөлөп интегралдоого болот:

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} U_n'(t)dt, \tag{37}$$

мында $x_0, x \in [a,b]$, бул (37) катар $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйналат. Ал эми $\int_{x_0}^{x} U_n'(t)dt = U_n(x) - U_n(x_0)$ болгондуктан (37) катарды

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x),\ v_n(x) = U_n(x) - U_n(x_0) \tag{38}$$

түрүндө жазабыз. Бул (38) катар бир калыпта жыйналат, ал эми (33) катар жыйналат (демек, анда $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйналат). Ошондуктан (32) катар $[a,b]$ сегментинде бир калыпта жыйналат, анткени бир калыпта жыйналуучу катарлардын айырмасынан турат.

Ошентип, (38) жана (35) барабардыктардан

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)dt = S(x) - S(x_0) \tag{39}$$

барабардыгын алабыз. Мындан $\tau(t)$ функциясы $[a,b]$ сегментинде, 5-теорема боюнча үзгүлтүксүз, анда жогорку предели өзгөрмө интегралдын касиети боюнча (39) дун сол жагы туундуга ээ болот жана ал $\tau(x)$ ке барабар. Ошондуктан оң жагы туундуга дифференцирленүүчү функция жана анын туундусу $S'(x)$ ти берет. Ошентип, $\tau(x) = S'(x)$ барабардыгы, б.а. (34) барабардык бардык $x \in [a, b]$ үчүн далилденди. ●

§ 2. ДАРАЖАЛУУ КАТАРЛАР

1. Даражалуу катардын радиусу жана жыйналуу тегереги

Функционалдык катарды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\eta - a)^n, \tag{1}$$

мында $c_n (n = 0,1,\ldots)$ жана a берилген комплекстүү сан, η — комплекстүү өзгөрмө чоңдукту даражалуу катар деп айтабыз, ал эми c_n — даражалуу (1) катардын коэффициенти болот.

Ушул катарга $z = \eta - a$ белгилөө киргизсек, анда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2}$$

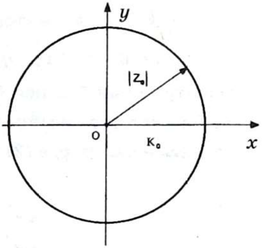
даражалуу катарына ээ болобуз жана бул катардын жыйналышын изилдөө (1) катардын жыйналышын изилдөө менен эквиваленттүү.

1-теорема (Абелдин теоремасы). *Эгерде даражалуу (2) катар $z = z_0 \neq 0$ маанисинде жыйналса, анда ал ар кандай $|z| < |z_0|$ барабарсыздыгын канааттандырган z тин маанисинде абсолюттуу жыйналат, эгерде бул катар $z = z_1 \neq 0$ маанисинде таралса, анда ал ар бир $|z| > |z_1|$ маанисинде таралат.*

○ а) Биз $k_0 = \{z: |z| < |z_0|\}$ менен комплекстик тегиздиктеги, борбору O чекити, радиусу $|z_0|$ болгон тегеректи белгилейли (1-чийме). Эгерде z тегерек k_0 дун $|z| < |z_0|$ барабарсыздыгын канааттандырган каалагандай чекити болсо, анда

$$q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1 \qquad (3)$$

орун алат. Шарт боюнча (2) катар z_0 чекитинде жыйналуучу болгондуктан $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$ шарты аткарылат. Ал эми мындан $\left\{c_n z_0^n\right\}$ удаалаштыгынын чектелгендиги келип чыгат, б.а.



1-чийме

$$\exists M > 0: \forall n \in \boldsymbol{N} \to \left|c_n z_0^n\right| \leqslant M. \qquad (4)$$

Эми (3) жана (4) барабарсыздыктарды колдонуп,

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant Mq^n,\ 0 \leqslant q \leqslant 1, \qquad (5)$$

чамалоосун алабыз. Ал эми $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mq^n$ сан катары жыйналгандыктан, салыштыруу белгиси (VIII гл, § 2, 2-п.) боюнча $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right|$ катары жыйналат, б.а. (2) катар k_0 тегерегинин ар бир чекитинде абсолюттуу жыйналат.

б) Эми (2) катар $z_1 \neq 0$ таралсын дейли. Анда (2) катар $|z_1| < |\bar{z}|$ барабарсыздыгын канааттандырган ар бир $\bar{z}$ чекитинде да таралуучу болот. Тескерисинче болсо жогорку далилдөө боюнча (2) катар $\bar{z}$ чекитинде жыйналуучу болот эле.

1-натыйжа. Эгерде (2) катар $z_0 \neq 0$ чекитинде жыйналса, анда $k_1 = \left\{z: |z| \leqslant \rho\right\}$ мында $\rho < |\bar{z}_0|$, тегерегинде ал катар абсолюттуу жана бир калыпта жыйналат.

○ Эгерде $z \in k_1$ жатса, анда $\left|c_n z^n\right| \leqslant M q_1^n, q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}$ жана ошондуктан $0 \leqslant q_1 \leqslant 1$, q_1 — саны z тен көз каранды эмес. Вейерштрасстын белгиси боюнча (2) катар k_1 де абсолюттуу жана бир калыпта жыйналат. ●

2-натыйжа. Эгерде (2) катар $z_0 \neq 0$ чекитинде жыйналса, анда

$$\sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}, \quad m \in \boldsymbol{N}, \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \tag{7}$$

катарлары k_0 тегерегинде абсолюттуу жыйналат, ал эми k_1 тегерегинде абсолюттуу жана бир калыпта жыйналат.

○ Алдыңкы (6) катар үчүн k_0 тегерегинде $\left|c_n z^{n-m}\right| \leqslant$

$\leqslant \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q^{n-m}$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, k_1 тегерегинде $\left|c_n z^{n-m}\right| \leqslant \frac{M}{|z_0|^m} \cdot q_1^{\,n-m}$ $(0 \leqslant q_1 \leqslant 1$ жана $q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}$ болуп z тен көз каранды эмес) барабарсыздыктар аткарылат. Ал эми (7) катар үчүн k_0 жана k_1 тегеректеринде

$$\left|n c_n z^{n-1}\right| \leqslant \frac{M}{|z_0|} n q^{n-1} \quad \text{жана} \quad \left|n c_n z^{n-1}\right| \leqslant \frac{M}{|z_0|} n q_1^{\,n-1}$$

барабарсыздыктары аткарылат. Мындан ары $\sum_{n=1}^{\infty} A q^n$ жана $\sum_{n=1}^{\infty} B n q^{n-1}$ $(A > 0,\ B > 0,\ 0 \leqslant q \leqslant 1)$ катарларын колдонуу жетиштүү. ●

2-теорема. ***Ар кандай (2) түрдөгү даражалуу катарларга $R(R \geqslant 0$ – сан же болбосо $+\infty$) аныкталат жана:***

а) эгерде $R \neq 0$ жана $R \neq +\infty$ болсо, анда (2) катар $k = \{z: |z| < R\}$ тегерегинде абсолюттуу жыйналат жана ал тегеректин сыртында таралат; бул тегеректи (2) катардын жыйналуу тегереги дешет, ал эми R — катардын жыйналуу радиусу.

б) эгерде $R = 0$ болсо, анда (2) катар бир гана $z = 0$ чекитинде жыйналат;

в) эгерде $R = +\infty$ болсо, анда бул катар бардык комплекстик тегиздикте жыйналат.

○ Бардык (2) катардын жыйналуу чекиттеринин көптүгүн D менен белгилейли. Бул көптүк куру эмес, анткени $z = 0$ чекитте (2) катар жыйналат.

Эгерде D чектелбеген көптүк болсо, анда (2) катар комплекстүү тегиздиктин каалаган $\bar{z}$ чекитинде жыйналат. Чындыгында эле $z_0 \in D$ чекитин $|\bar{z}| < |z_0|$ болгудай кылып алсак, анда Абелдин теоремасы боюнча (2) катар $\bar{z}$ чекитинде жыйналат.

Эми D чектелген көптүк болсун. Эгерде D бир $z = 0$ чекитинен турса, анда (2) катар $z = 0$ маанисинде жыйналат жана $z \neq 0$ маанисинде таралат. Бул учурда $R = 0$. Эгерде D көптүгү $z = 0$ чекитинен айырмалуу, жок дегенде бир чекиттен турса, анда $R = \sup\limits_{z \in D} |z|$ деп белгилеп, (2) катардын $k = \{z: |z| < R\}$ тегерегинде жыйнала тургандыгын, бул тегеректин сырткы чекиттеринде тарала тургандыгын далилдейбиз. Накта жогорку чектин аныктамасы боюнча

$$\exists z_1 \in D: |z| < |z_1| < R.$$

(2) катар z_1 чекитинде жыйналгандыктан ал Абелдин теоремасы боюнча $\bar{z}$ чекитинде абсолюттуу жыйналат. Демек, k тегерегинин каалаган чекиттеринде (2) катар абсолюттуу жыйналат.

Эми z' чекити k тегерегинин сырткы чекити болсун, б.а. $|z'| > R$, анда $z' \notin D$ жана ошондуктан (2) катар z' чекитинде таралат.

1-эскертүү. k тегерегинин чек арасында (2) катар мүмкүн жыйналат же таралат. Ар кандай кичине $k_1 = \{z: |z| < \rho < R\}$ тегерегинде (2) катар абсолюттуу жана бир калыпта жыйналат.

3-теорема. *Эгерде чектүү же чексиз* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ *предели аныкталса, анда (2) катардын жыйналуу R радиусу үчүн*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{8}$$

формула орун алат, ал эми эгерде чектелген же чексиз $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ предели аныкталса, анда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{9}$$

○ Адегенде (8) формуланы далилдейли: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ болсун.

а) $0 < \rho < +\infty$ жана z_0 чекит $k = \left\{z: |z| < \frac{1}{\rho}\right\}$ тегерегинин каалаган чекити болсун, анда $|z_0| < \frac{1}{\rho}$ жана (8) ден

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n z_0^n|} = |z_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z_0|\rho < 1.$$

Кошинин (VIII гл, §2, 4-п.) белгиси боюнча $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ катары абсолюттуу жыйналат. Ал эми z_0 чекити k тегерегинин каалаган чекити болгондуктан, (2) катар бул тегеректе абсолюттуу жыйналат.

Эми $\bar{z}$ чекити k тегерегинин сырткы чекити болсун, анда $|\bar{z}| > \frac{1}{\rho}$ жана ошондуктан $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\bar{z}^n\right|} = |\bar{z}|\rho < 1$. Демек, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\bar{z}^n$ катары $|\bar{z}| > \frac{1}{\rho}$ үчүн таралат.

Ошентип, эгерде (8) барабардыктын оң жагы оң сан болсо, анда (2) катар k тегерегинде жыйналат, ал тегеректин сыртында таралат. Ошондуктан, $\frac{1}{\rho}$ — (2) катардын жыйналуу радиусу.

б) Эгерде $\rho = 0$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n z^n\right|} = |z|\rho = 0$ комплекстүү тегиздиктеги ар кандай z чекиттер үчүн жана (2) катар ар кандай z үчүн жыйналат. Бул болсо, катардын жыйналуу радиусу $R = +\infty$ экендигин билгизет.

в) Эгерде $\rho = +\infty$ болсо, анда ар кандай $z \neq 0$ чекитинде $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n z^n\right|} = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$ жана ошондуктан (2) катар $z \neq 0$ маанисинде таралат. Бул $R = 0$ экендигин билгизет.

Ушундай жол менен жана Даламбердин (VIII гл, §2, 3-п.) белгисин колдонуп, (9) формуланы далилдөөгө болот. ●

1-мисал. Даражалуу $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ катардын жыйналуу R радиусун тапкыла, эгерде:

а) $c_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$; б) $c_n = \frac{(1+i)^n}{n3^n}$.

Δ а) $n \to \infty$ да $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n+1}{a} \to +\infty$, анда (9) формула боюнча $R = +\infty$ экендиги келип чыгат.

б) Бул учурда $c_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n3^n}$ жана $\sqrt[n]{|c_n|} \to \dfrac{\sqrt{2}}{3}, n \to \infty$ да антке-ни $n \to \infty$ да $\sqrt[n]{n} \to 1$. Анда (8) формула боюнча $R = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. ▲

Эми биз

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{10}$$

даражалуу катарын карайлы. Мында $a_n (n = 0,1,\ldots,\ldots)$, x_0 — берилген анык сан, x — анык өзгөрмө чоңдук, 2-теореманын негизинде $R (R \geqslant 0$ — сан же $+\infty)$ аныкталып жана $R \neq 0, +\infty$ болсо, (10) катар $|x - x_0| < R$ маанисинде жыйналат, ал эми $|x - x_0| < R$ маанисинде таралат. Бул учурда (10) катардын $(x_0 - R, x_0 + R)$ жыйналуу интервалы, ал эми R — жыйналуу радиусу. $R = +\infty$ болсо, бүткүл сан огунда жыйналат.

2. Даражалуу катарлардын касиеттери

4-теорема. *Даражалуу катарлар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}, \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{13}$$

бир жана ошол эле жыйналуу радиуска ээ болушат.

○ Бул (11), (12) жана (13) катарлардын жыйналуу радиустарын R, R_1 жана R_2, жыйналуу тегерегин k, k_1 жана k_2 болсун дейли. Эми

$$R_1 = R = R_2 \tag{14}$$

болоорун далилдейли.

Бардык $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн $\frac{1}{n+1} \leqslant 1 \leqslant n$ болгондуктан

$$\left|\frac{c_n}{n+1} z^{n+1}\right| \leqslant |z| \cdot \left|c_n z^n\right| \leqslant |z|^2 \left|n c_n z^{n-1}\right| \tag{15}$$

барабарсыздыктары ар бир $n \in \boldsymbol{N}$ жана ар кандай z үчүн орун алат.

а) $z = z_0 \in k_2$ жана $z_0 \neq 0$, анда 2-теорема боюнча (13) катар z_0 чекитинде абсолюттуу жыйналат, ал эми (15) барабарсыздыктын оң жагын эске алсак, анда салыштыруу теоремасынын негизинде (11) катар z_0 чекитинде абсолюттуу жыйналат. Демек, эгерде $z_0 \in k_2$, анда $z_0 \in k$ жана ошондуктан

$$R_2 \leqslant R. \tag{16}$$

б) Ушул сыяктуу, эгерде $z = z_0 \neq 0$ жана $z_0 \in k$, анда (16) нын сол жагын эске алып, (12) катардын z_0 чекитине абсолюттуу жыйналышы келип чыгат. Ошондуктан, эгерде $z_0 \in k$, анда $z_0 \in k_1$ жана

$$R \leqslant R_1. \tag{17}$$

Алынган (16) жана (17) барабарсыздыктарынан

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1 \tag{18}$$

кош барабарсыздыгын жаза алабыз.

в) Биз эми

$$R_1 \leqslant R_2 \tag{19}$$

барабарсыздыгын далилдейли.

Мейли $z_0 \in k_1$ жана $z_0 \neq 0$, анда $|z_0| < R_1$ жана (12) катар z_0 чекитинде абсолюттуу жыйналсын (2-теорема). Биз ρ ну

$$|z_0| < \rho < R_1 \tag{20}$$

болгудай кылып алабыз. Анда

$$\left|nc_n z_0^{n-1}\right| = \left|\frac{c_n \rho^{n+1}}{n+1}\right| \cdot \left(\frac{|z_0|}{\rho}\right)^{n+1} \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} \tag{21}$$

барабардыгын жазабыз.

Алдыңкы (20) шарттын негизинде $\rho \in k_1$, анда (12) катар $z = \rho$ маанисинде жыйналат жана ошондуктан

$$\exists M > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} \to \left|\frac{c_n \rho^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M. \tag{22}$$

Дагы, $\dfrac{|z_0|}{\rho} = q$ деп белгилейли, анда $0 < q < 1, z_0 \neq 0$. Ошентип, (20) шарт орун алат. Ушуларды жана (22)ни эске алып, (21) ден

$$\left|nc_n z_0^{n-1}\right| \leqslant \frac{M}{|z_0|^2} n(n+1)q^{n+1}, \quad 0 < q < 1 \tag{23}$$

чамалоосун алабыз. Эми $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{M}{|z_0|^2} n(n+1)q^{n+1}$ катары Даламбердин белгиси боюнча жыйналат, анда (23) төн (13) катардын z_0 чекитинде абсолюттуу жыйналышы келип чыгат. Демек, эгерде $z_0 \in k_1$, анда $z_0 \in k_2$. Мындан

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{24}$$

(18) жана (24) барабарсыздыктарынан (14) барабардык келип чыгат. ●

Эми биз (10) даражалуу катарга токтололу, ал катардын коэффициенттери анык сан, ал эми x өзгөрмө чондугу анык маанилерди алат.

5-теорема. *Эгерде*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x) \qquad (25)$$

катары $R>0$ жыйналуу радиусуна ээ болсо, анда:

1) жыйналуу (x_0-R, x_0+R) интервалында $f(x)$ функциясы каалаган тартиптеги туундуга ээ болот, ал туунду (25) катарды мүчөлөп дифференцирлөө жолу менен алынат;

2) жыйналуу интервалында бул катарды мүчөлөп интегралдоого болот, б.а. ар кандай $x \in (x_0-R, x_0+R)$ үчүн

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} \qquad (26)$$

барабардыгы орун алат.

○ Биз (25) катардын туундуларынан түзүлгөн

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} \qquad (27)$$

катарын карайлы. 4-теорема боюнча (27) катар, (25) катар кандай жыйналуу радиусуна ээ болсо, так ошондой жыйналуу радиусуна ээ болот, ал эми 1-теореманын 1-натыйжасы боюнча (27) катар $\Delta_\rho = [x_0-\rho, x_0+\rho]$ аралыгында бир калыпта жыйналат, мында ρ каалагандай $0<\rho<R_1$ шартын аткаруучу сан. 7-теореманын негизинде (§1ди кара) (25) катарды $\Delta\rho$ аралыгында мүчөлөп дифференцирлөөгө болот, демек, анда каалаган $x \in (x_0-R, x_0+R)$ чекитинде, б.а.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \ x \in (x_0-R, x_0+R) \qquad (28)$$

индукция боюнча

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_n k(k-1)\dots(k-(n-1))(x-x_0)^{k-n} \qquad (29)$$

далилдөөгө болот, мында $n \in \boldsymbol{N}$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, б.а. (25) катарды каалаган тартипке чейин мүчөлөп дифференцирлөөгө болот.

Ал эми (26) барабардыктын тууралыгы 6-теоремадан (§1 ди кара) келип чыгат. ●

Натыйжа. Жыйналуу радиусу $R > 0$ болгон (25) катардын коэффициенттерин

$$a_0 = f(x_0),\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ n \in \boldsymbol{N} \tag{30}$$

формуласы аркылуу аныктайбыз.

○ Бул (30) формуланы (25) жана (29) дан $x = x_0$ маанисинде алабыз. ●

§ 3. ТЕЙЛОРДУН КАТАРЫ

1. Тейлордун катары жөнүндө түшүнүк

Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинин аймагында аныкталып жана x_0 чекитинде бардык тартиптеги туундуларга ээ болсо, анда даражалуу катарды

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{1}$$

$f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги Тейлордун катары деп айтабыз.

Биз $f(x)$ функциясын x_0 чекитинин аймагында, өзүнө жыйналуучу даражалуу катар түрүндө

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,\ |x - x_0| < \rho,\ \rho > 0 \tag{2}$$

жазалы. Анда, алдыңкы 5-теорема боюнча $f(x)$ функциясы x_0 чекитинин аймагында чексиз дифференцирленүүчү функция болот жана (2) формуланын негизинде коэффициенттерин

$$a_0 = f(x_0),\quad a_n = \frac{f^{(n)}_{(x_0)}}{n!},\quad n \in \boldsymbol{N} \tag{3}$$

формула аркылуу аныктайбыз.

Эми кандай функциялар даражалуу катарга ажыралышы мүмкүн деген суроо коюлсун. Жогоруда айтылгандай, ар кандай $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде каалагандай тартиптеги туундуга ээ болот. Бирок, тескерисинче айтууга болбойт, б.а. x_0 чекитинде бардык тартиптеги туундуга ээ болуучу $f(x)$ функциясынын бардыгы эле даражалуу катарга ажырала бербейт.

Ошентип, $f(x)$ функциясынын даражалуу катарга ажыралышы үчүн жетиштүү шартты белгилөөгө аракеттенели. Ошол максатта формалдуу түрдө $f(x)$ функциясы Тейлордун катарына ажыралсын дейли:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4}$$

Эгерде бул катардын n-айрым суммасын $S_n(x)$ аркылуу белгилесек, анда $S_n(x)$ өзү n-даражалуу көп мүчө болуп саналат.

$$S_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{5}$$

Ушул учурда $f(x)$ функциясы менен (5) көп мүчөнүн айырмасын Тейлордун формуласынын n-калдык мүчөсү деп айтабыз дагы $r_n(x)$ аркылуу белгилейбиз, анда

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \tag{6}$$

болот. Мына ошентип, x_0 чекитинде каалагандай тартиптеги туундуга ээ болуучу $f(x)$ функциясы ага туура келүүчү (4) Тейлордун катарынын суммасы болуш үчүн $S_n(x)$ тин $f(x)$ ке жыйналышы зарыл жана жетиштүү болуп саналат, б.а. $n \to \infty$ да $r_n(x) \to 0$ зарыл жана жетиштүү болот.

5*

Эгерде берилген $f(x)$ функциясы үчүн Тейлордун формуласынын $r_n(x)$ калдык мүчөсү $n \to \infty$ да x тин тигил же бул маанилери үчүн нөлгө умтулса, анда ал функция ажыралган Тейлордун катары сөзсүз ошол $f(x)$ функциясына жыйналат. Эгерде $n \to \infty$ да $r_n(x)$ калдык мүчөсү пределге ээ болбосо же нөлдөн айырмалуу пределге ээ болсо, анда Тейлордун катары же таралуучу катар болот, же $f(x)$ тен бөлөк башка функцияга жыйналат.

1-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $f'(x),\dots,f^{(n+1)}(x)$ туундуларга ээ болуп, алар $\Delta=(x_0-\delta,x_0+\delta),\delta>0$ интервалында үзгүлтүксүз болушса, анда каалаган $x\in\Delta$ үчүн Тейлордун калдык мүчөсү:*

а) Интегралдык түрдө

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt; \tag{7}$$

б) Лагранжа түрүндө

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \ x_0\leqslant\xi\leqslant x,\ \ \xi=x_0+\theta(x-x_0),$$

$$0<\theta<1; \tag{8}$$

в) Коши түрүндө

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1 \tag{9}$$

формулалар аркылуу туюнтулат.

○ Биз (7) формуланы индукция закону боюнча далилдейли. Алдыңкы (5) жана (6) боюнча

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{10}$$

формуласын жазууга болот. Эми $\int_{x_0}^{x}f'(t)dt=f(x)-f(x_0)$ формуласын колдонуп, анын сол жагына бөлүктөп интегралдоо ыкмасын пайдаланып өзгөртүп түзөбүз:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = \left[-f'(x)(x-t)\right]\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt.$$

Ошентип,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt,$$

б.а. (10) формула $n = 1$ үчүн туура. Эми биз (10) формуланы $n-1$ үчүн орун алат дейли, б.а.

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt. \quad (11)$$

Ушул (11) оң жагындагы интегралды, бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонуп, өзгөртүп түзөлү:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt = -\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)d\left((x-t)^n\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{n+1}(t)dt = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Мындан, (11) барабардыкты (10) түрдө жазууга мүмкүн экендигин алабыз. Демек, (7) формула далилденди. ●

2-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы жана анын бардык тартиптеги туундулары $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында чектелсе, б.а.*

$$\exists M > 0 : \forall x \in \Delta \to \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

анда $f(x)$ функциясын өзүнө жыйнала турган, Δ интервалынын ар бир чекитинде Тейлордун (4) катарына ажыратууга болот.

○ $x \in (x_0 - \delta, x + \delta)$ жатсын, анда (8) формуланы колдонуп, (12) шарттын негизинде

$$|r_n(x)| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{13}$$

чамалоосун алабыз. Мындан, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ эске түшүрсөк, анда (13) формуладан

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \tag{14}$$

шарты келип чыгат. ●

2. Элементардык функцияларды Тейлордун катарына ажыратуу

Негизги элементардык функцияларды $x_0 = 0$ чекитинин аймагында Тейлордун катарына, б.а.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(0)}^{(n)}}{n!} x^n \tag{15}$$

Маклорендин катары деп аталуучу катарга ажыраталы.

а) Көрсөткүчтүү жана гиперболалык функциялар. $f(x) = e^x$ болсун, анда ар кандай $x \in (-\rho, \rho)$, $(\rho > 0)$ үчүн

$$0 < f(x) < e^{\rho}, \ 0 < f^{(n)}(x) < e^{\rho}, \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Алдыңкы 2-теорема боюнча (15) катар, $f(x) = e^x$ функциясы үчүн, ушул функцияга $(-\rho, \rho)$ жыйналат жана бул катардын жыйналуу радиусу $R=+\infty$. Ал эми $f(x)=e^x$ функциясы үчүн $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=1$ болгондуктан (15) формула боюнча

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{16}$$

көрсөткүчтүү функциянын Маклорендин катарына ажыралышын алабыз.

Эми (16) формуланы жана

$$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

формуласын колдонуп, гиперболалык косинустун жана гиперболалык синустун Маклорендин катарына ажыралышын жаза алабыз:

$$shx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{17}$$

$$chx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{18}$$

Бул (17) жана (18) катарларынын жыйналуу радиустары $R=+\infty$.

б) Тригонометриялык функциялар. Адегенде $f(x)=\sin x$ болсун, анда $|f(x)|\leqslant 1$ жана $\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant 1$ барабарсыздыктары бардык $n\in N$ жана бардык $x\in R$ үчүн орун алат. 2-теорема боюнча $f(x)=\sin x$ функциясына ар кандай $x\in(-\infty,+\infty)$ үчүн (15) катар жыйналат жана жыйналуу радиусу $R=+\infty$.

Эгерде $f(x)=\sin x$ болсо, анда $f(0)=0$, $f^{(2n)}(0)=0$, $f'(0)=1$, $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$ ар кандай n үчүн жана (15) боюнча синустун Маклорендин катарына ажыралышын алабыз:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \tag{19}$$

Эми $f(x) = \cos x$ болсо, анда $|f(x)| \leqslant 1, |f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ бардык n жана бардык $x \in \boldsymbol{R}$ үчүн, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ бардык n үчүн. Анда (15) формула боюнча

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{20}$$

ажыралышын алабыз жана жыйналуу радиусу $R = +\infty$.

в) Логарифмалык функция. $f(x) = \ln(1+x)$ болсо, анда

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}. \tag{21}$$

Ал эми мындан

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{22}$$

Алынган (22) жана (15) негизинде

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \tag{23}$$

ажыралышын алабыз жана радиусу $R = 1$. Калдык мүчөсүнүн $n \to \infty$ да $r_n(x) \to 0$ көрсөтөлү

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}, \quad 0 < \xi < x$$

болгондуктан жана $0 \leqslant x \leqslant 1$ болсо $\dfrac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \leqslant 1$, анда $|r_n(x)| <$

$< \dfrac{1}{n+1}$ болот да $n \to \infty$, $r_n(x) \to 0$.

Эгерде (23) формулага $x = 1$ десек, ($x = 1$ чекитинде ал формула орун алат), анда

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

катарын алабыз. Ал (23) формулага x ти $-x$ менен алмаштырып,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{24}$$

катарына ээ болобуз.

г) Көрсөткүчтүү функция. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ берилсин. Эгерде $\alpha = 0$ болсо, анда $f(x) = 1$, ал эми $\alpha = n$, $(n \in \boldsymbol{N})$ болсо, анда $f(x)$ функциясы n-даражадагы көп мүчө болуп, аны Ньютондун биномунун формуласын колдонуп, чектүү сандагы суммага ажырата алабыз:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n^k x^k.$$

Эгерде $\alpha \neq \boldsymbol{N}$ жана $\alpha \neq 0$ болсо, анда $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ функциясын ар бир $x \in (-1,\ 1)$ интервалында өзүнө жыйналуучу

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\alpha}^n x^n \tag{25}$$

Маклорендин катарына ажыратууга мүмкүн экендигин көрсөтөбүз, мында

$$c_{\alpha}^0 = 1,\ c_{\alpha}^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}. \tag{26}$$

○ Биз (7) формуланы өзгөртүп алалы, ал үчүн $t = \tau x$ алмаштыруусун алсак, анда $dt = x d\tau$, $x - t = x(1-\tau)$. Бул учурда (7) формула $t_0 = 0$ үчүн

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau x) d\tau \tag{27}$$

түрүндө жазылат. Ал эми

$$f^{(n\_+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)} \tag{28}$$

болгондуктан (27) формула боюнча

$$r_n(x) = A_n x^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau \qquad (29)$$

формуласын алабыз, мында $A = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}$.

Эми $m \in N$ санын $|\alpha| \leqslant m$ болгудай кылып тандап алалы, анда бардык $n \geqslant m$ үчүн

$$|A_n| \leqslant \frac{m(m+1)\dots(m+n)}{n!} \leqslant \frac{(m+n)!}{n!} = (n+1)\dots(n+m) \leqslant (2n)^m \qquad (30)$$

чамалоосу орун алат. Дагы $|1+\tau x| \leqslant 1+|x|$ чамалоосун эске алсак, анда

$$0 \leqslant \frac{1-\tau}{1+x\tau} \leqslant 1, \qquad (31)$$

$$|1+\tau x|^{\alpha-1} \leqslant \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \text{эгерде } \alpha \geqslant 1, \\ (1-|x|)^{\alpha-1}, & \text{эгерде } \alpha < 1 \end{cases} \qquad (32)$$

чамалоолорун алабыз. Ушул алынган (29), (30), (31), (32) лерден

$$|r_n(x)| \leqslant \beta(x) \cdot 2^m n^m |x|^{n+1} \qquad (33)$$

чамалоосу бардык $n \geqslant m$ жана ар бир $x \in (-1,\ 1)$ үчүн орун алат.

Бул (33) барабарсыздыкка $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^m}{a^t} = 0$, $(a > 1)$ пределин колдонсок, анда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^m}{(1/n)^{n+1}} = 0$ болот. Демек, анда $n \to \infty$ да $r_n(x) \to 0$, б.а. (25) туура экендиги далилденет жана ал катардын жыйналуу радиусу $R = 1$. ●

Ошол (25) катардын айрым учурларын алалы:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad (34)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n. \qquad (35)$$

Жыйынтыгында, берилген функцияны Тейлордун катарына ажыратуу үчүн жогору келтирилген формулаларды колдонушат. Андан башка дагы: берилген функцияны, Тейлордун катарына ажыралышы белгилүү болгон функциялардын сызыктуу комбинациясына ажыратуу; өзгөрмөлөрдү алмаштыруу; катарларды мүчөлөп дифференцирлөө жана интегралдоо ыкмаларын колдонууга болот.

1-мисал. Берилген $f(x)$ функциясын Маклорендин катарына ажыратып, алардын жыйналуу радиусун тапкыла, эгерде:

а) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-6}$.

Δ а) Алдыдагы (34) формуланы колдонуп,

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (36)$$

катарын алабыз. Жыйналуу радиусу $R=1$.

б) (25) формуланын негизинде $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-\frac{1}{2}}^{n}x^{2n}$, мында

$$c_{-1/2}^{n}=\frac{\left(-1/2\right)\left(-1/2-1\right)\ldots\left(-1/2-(n-1)\right)}{n!}=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Анда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},\ R=1. \qquad (37)$$

в) $f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2\left(1+x/2\right)}+\frac{1}{3\left(1-x/3\right)}$

болгондуктан, (34) жана (35) формулалар аркылуу

$$\frac{2x-1}{x^2+x-6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n,\ R=2$$

катарын алабыз. ▲

2-мисал. $\operatorname{arctg}x$, $\arcsin x$, $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ **функцияларын Маклорендин катарына ажыратып, жыйналуу радиусун** R **ди тапкыла.**

Δ а) Азыркы (36) катарды мүчөлөп интегралдап,

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad R=1$$

катарына ээ болобуз.

б) (37) формуладагы x^2 ты $-x^2$ ка алмаштыруу ыкмасы менен

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},\quad R=1$$

катарын алып, ал эми муну мүчөлөп интегралдап,

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1},\ R=1$$

катарын алабыз.

в) Жогорку (37) катарды мүчөлөп интегралдасак, анда

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1},\ R=1.\ ▲$$

3-мисал. $x_0=2$ **чекитинде** $f(x)=\ln(4+3x-x^2)$ **функциясын Тейлордун катарына ажыраткыла.**

Δ Мында $4 + 3x - x^2 = -(x-4)(x+1)$, анда $t = x - 2$ алмаштыруусун алсак,

$$f(x) = \ln(4-x)(x+1) = g(t) = \ln(2-t)(3+t) =$$
$$= \ln 6 + \ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{t}{3}\right)$$

алабыз, ал эми (23) жана (24) формулалар боюнча

$$g(t) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n\cdot 3^n}, \quad |t| < 2.$$

Демек,

$$\ln(4+3x-x^2) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{(x-2)^n}{n}, \quad R = 2. \blacktriangle$$

3. Даражалуу катарлардын колдонулушу

а) Даражалуу катарлар функциялардын маанилерин жакындаштырып эсептөө үчүн колдонулат. Биз жогоруда далилденген катарларга дагы бир жолу токтололу:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{38}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \tag{39}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots. \tag{40}$$

Бул катарлар аркылуу, алар бардык сан огунда орун алгандыктан, e^x, $\sin x$ жана $\cos x$ функцияларынын маанилерин тигил же бул тактыкта эсептейбиз. Эгерде бул функциялардын болжолдуу мааниси үчүн алардын айрым суммаларын алсак, бул учурда келтирилген катаны оңой эле чамалоого болот, айрыкча (39) жана (40) катарлар үчүн Лейбництин белгисин колдонуп, кетирилген ката биринчи алып ташталган мүчөдөн кичине болот.

4-мисал. $\cos 5^0$ ту 10^{-5} тактыкта эсептегиле.

Δ Сөзсүз (40) катарды колдонобуз, бирок анда x радиандык чен болгондуктан $\pi \cdot \frac{5}{180} = \frac{\pi}{36} = x$. Демек,

$$\cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \ldots .$$

Бул белгиси кезектешме катар, Лейбництин белгисиндеги бардык шарттарды канааттандырат. Мында $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 < 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$ болгондуктан үчүнчү мүчөдөн баштап калган бардык мүчөлөрүн калтырып коюш керек, б.а. 10^{-5} тактык менен эсептөө үчүн биринчи эки мүчө гана жетиштүү болот:

$$\cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \approx 1 - 0{,}003808 = 0{,}996192. \ \blacktriangle$$

5-мисал. $\sqrt[3]{e}$ санын 0,0001 тактык менен эсептегиле.

Δ (38) катарга $x = \frac{1}{3}$ болсун десек:

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 2!} + \ \ldots \ + \frac{1}{3^n n!} + \ldots$$

болжолдуу барабардыгына ээ болобуз. Кетирилген каталыкты эсептөө Маклорендин калдык мүчөсүнүн

$$r_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (0 < \xi < x)$$

формуласын колдонобуз. Бул мисалда $x = \frac{1}{3}$, анда

$$r_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Ал эми $e^{\xi} < e^{1/3} < \sqrt[3]{3} < 3$ болгондуктан

$$r_n\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{3}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n (n+1)!}.$$

Кетирилген каталык 0,0001 ден ашпас үчүн $n = 5$ деп алуу жетиштүү болот, анткени

$$r_5\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{3}{(5+1)!\,e^5} = \frac{1}{17460} < 0{,}0001.$$

Мына, ошентип 0,0001 тактык менен

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!} + \frac{1}{3^4 \cdot 4!} + \frac{1}{3^5 \cdot 5!} \approx 1{,}39620. \ \blacktriangle$$

Алдыдагы (25) катары

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \qquad (25)$$

кандайдыр бир натуралдык сандардын радикалын тигил же бул тактыкта эсептөө үчүн өтө ыңгайлуу.

6-мисал. $\sqrt[4]{84}$ санын 0,0001 тактык менен эсептегиле.

Δ Муну эсептөө максатында төртүнчү даражасы 84төн ашпаган эң чоң бүтүн санды тандап алабыз. Андай сан үчүн 3тү алууга болот, анткени $3^4 = 81 < 84$, ал эми $4^4 = 256 > 84$. Демек, $\sqrt[4]{84}$ санын төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\sqrt[4]{84} = \sqrt[4]{81+3} = \sqrt[4]{81\left(1+\frac{3}{81}\right)} = 3\sqrt[4]{1+\frac{1}{27}} = 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Анда

$$\sqrt[4]{84} \approx 3\left[1 + \frac{1}{4 \cdot 27} + \frac{3}{2! \cdot 4^2 \cdot 27^2} + \frac{3 \cdot 7}{3!4^3 \cdot 27^3} - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{4!4^4 \cdot 27^4} + \ldots\right].$$

Бул дагы белгиси кезектешме катар болгондуктан

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4!\,4^4 \cdot 27^4} < 0{,}0001,$$

анда биринчи үч мүчө менен гана чектелебиз:

$$\sqrt[4]{84} \approx 3{,}00000 + 0{,}02778 - 0{,}00038 = 3{,}02740. \ \blacktriangle$$

б) Даражалуу катардын жардамы менен сандардын логарифмдерин дагы жакындаштырып эсептөөгө болот. Ал үчүн (23) формуладан (24) формуланы кемитсек,

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ \dots \ + \frac{x^{2k}}{2k+1} + \ \dots\right) \qquad (41)$$

катарын алабыз. Эми $x = \dfrac{1}{2n+1}$ деп белгилесек, анда $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{n+1}{n}$ болот да (41) ден

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ \dots \ + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}} + \ \dots\right] \qquad (42)$$

катары келип чыгат. Ушул (42) катардын жардамы менен 2ден баштап бардык натуралдык сандардын натуралдык логарифмдерин эсептейбиз.

Чындыгында эле $n = 1$ болсо, анда (42) катардан

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{3^{2k}} + \dots\right]$$

катарын алабыз. Бул мурунку ln2нин ажыралышына караганда өтө тез жыйналуучу катар. Ал эми (42) катарга $n = 2$ десек,

$$\ln 3 - \ln 2 = \frac{2}{5}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^4} + \dots\right]$$

катарына ээ болобуз. Ушундай эле $\ln 4 = 2\ln 2$, $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$, $\ln 18 = \ln 2 + \ln 9$, $\ln 25 = 2\ln 5$ ж.б. барабардыктарды колдонуп эсептөөгө болот.

в) Катарларды элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаган интегралдарды жакындаштырып эсептөөгө колдонууга болот.

Маселен, $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ анык интегралын 0,001 тактыкта эсептөө керек болсун. Бул интегралды Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча эсептөөгө болбойт, анткени $f(x)=e^{-x^2}$ функциясынын баштапкы функциясы элементардык функциялар аркылуу туюнтулбайт. Ошондуктан (38) катарга x тин ордуна $-x^2$ ты коюп, мүчөлөп интегралдайбыз:

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{1/4}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots\right)dx = \left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/4} =$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot4^3}+\frac{1}{2!5\cdot4^5}\ldots.$$

Демек, маанисин эсептей турган интеграл белгиси кезектешме катардын суммасы экендиги ачык. Эми аны 0,001 тактыкта эсептөө үчүн $\frac{1}{3\cdot4^5}>0{,}001$, ал эми $\frac{1}{2!5\cdot4^5}<0{,}001$ экендигин билип, анын биринчи эки мүчөсү менен гана чектелебиз:

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot4^3}=0{,}2500-0{,}0052=0{,}2448.$$

Эми «интегралдык синус» деп аталуучу

$$six=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt,$$

интегралын Тейлордун катарына ажыратaлы. Ал үчүн (39) формуланы жана даражалуу катарды мүчөлөп интегралдоо эрежесин колдонуп,

$$six = \int_0^x \frac{1}{t}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^x t^{2k}dt =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \qquad (43)$$

катарын алабыз. Ар кандай x үчүн бул белгиси кезектешме катар, ошондуктан катардын калдыгы биринчи алынып ташталган мүчөдөн ашпайт. Мына ушуну мисалда көрсөтөлү.

7-мисал. si2ни 10^{-5} тактыгында эсептегиле.

Δ Ал үчүн (43) катарды колдонуп, берилген мисалды 10^{-5} тактыгында эсептөө үчүн биринчи беш мүчөсүн алуу жетиштүү.

$$si2 \approx 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} + \frac{32}{5\cdot 5!} - \frac{128}{7\cdot 7!} + \frac{512}{9\cdot 9!} = 1{,}605417. \ \blacktriangle$$

г) Даражалуу катарларды пределди табуу үчүн да колдонушат. Көпчүлүк учурда тигил же бул чоңдук чексиз кичине болобу же жокпу деген суроо коюлат. Мындай учурда, катар түзүлүп, анын жыйналышын изилдөө жана жыйналуунун зарыл шартын колдонуу жетиштүү.

8-мисал. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}$ жана $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!\,a^{-n}}$ пределдерин тапкыла.

Δ Ал үчүн катар түзөбүз,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!} \quad \text{жана} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,a^n$$

жана бул катарларга Даламбердин белгисин колдонуп,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!|a|^n} = 0 \text{ ар кандай } a \text{ үчүн жана}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)n!\,a^{n+1}}{n!(n+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)a^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n-a}{n+1}|a| = |a|.$$

Мындан,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad \text{ар кандай } a \text{ үчүн},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!}a^n=0, \text{ эгерде } |a|<1$$

жана $$\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!}|a|^n=\infty, \text{ эгерде } |a|>1$$

жыйынтыгын алабыз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Берилген функционалдык катар

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\ \dots\ +\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ \dots$$

$x=1, x=2$ жана $x=3$ чекиттеринде жыйналабы?

2. Катардын жыйналуу областын аныктагыла:

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2\left(x^2+1\right)^2}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2\left(x^2+1\right)^n}+\ \dots.$$

Ж о о б у. $(-\infty,\infty)$.

3. Даражалуу катардын жыйналышын аныктагыла:

$$5x+\frac{5^2\cdot x^2}{2!}+\frac{5^3\cdot x^3}{3!}+\ \dots\ +\frac{5^n\cdot x^n}{n!}+\ \dots.$$

Ж о о б у. Бардык x үчүн.

4. Катарлардын суммасын аныктагыла:

а) $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\ \dots\ +\frac{nx^{n-1}}{a^n}+\ \dots$, мында $|x|<a$.

Ж о о б у. $\frac{a}{(a-x)^2}$.

б) $-2x+4x^3-6x^5+\ \dots\ +(-1)^n 2nx^{2n-1}+\ \dots$, мында $|x|<1$.

Ж о о б у. $1/(1+x^2)^2$.

6*

5. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{4^4}+\ \dots\ +(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}+\ \dots$ катарларынын суммасын анын n-айрым суммасы менен алмаштырууда пайда болгон каталыкты чамалагыла.

6. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ интегралын 0,001 тактыкта эсептегиле.

7. Жакындаштырылган формулаларды колдонуп, эсептегиле.

а) $\sqrt{1{,}0004}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}997}}$.

Жообу. а) 1,0002. б) 1,001.

X глава

ӨЗДҮК ЭМЕС ЖАНА ПАРАМЕТРДЕН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН ИНТЕГРАЛДАР

I. ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

§ 1. ЧЕКСИЗ ПРЕДЕЛДҮҮ ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

Жарым түз сызыкта $a \leqslant x < \infty$ аныкталган $f(x)$ функциясы үчүн ар кандай $B > a$, б.а. чектүү $[a, B]$ аралыгында $\int\limits_a^B f(x)dx$ интегралы жашасын (VII гл., 1-бөлүк).

Аныктама. *Өздүк эмес* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *интегралы деп*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)dx \tag{1}$$

пределин айтабыз.

Эгерде ушул предел жашаса жана чектүү болсо, анда өздүк эмес интегралды жыйналат деп, ал эми тескерисинче болсо таралат деп айтышат.

Ушул аныктамадай эле

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_A^a f(x)dx \tag{2}$$

өздүк эмес интегралын аныктасак болот.

Ал эми эки интегралдоо пределдери чексиз болсо, анда эрктүү a санын алып

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{3}$$

барабардыгын жазып, (1) жана (2) аныктамаларды колдонобуз жана $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы жыйналат качан гана оң жаккы эки интеграл тең жыйналышса. Мында, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жыйналган учурда анын мааниси a чекитин тандоодон көз каранды эмес.

Ушул интегралды дагы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} f(x)dx \tag{3}$$

түрүндө да аныктоого болот. Мында A жана B өз пределдерине, бири-бирине көз каранды болбостон умтулушат.

Ошентип, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралы $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ жана $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интегралдарына келтирилет жана $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ интегралы жөнөкөй эле x ти $-x$ менен алмаштырууда $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интегралына келтирүүгө болот, ошондуктан биз мындан ары $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интегралын окуп үйрөнөбүз.

Мисалдар. 1. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \sin x dx = \lim\limits_{B\to+\infty} (1-\cos B).$

Бул таралуучу өздүк эмес интеграл, анткени $B\to+\infty$ да $\cos B$ функциясы -1 менен $+1$ чекиттеринин арасында термелип, эч пределге умтулбайт.

$$2.\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}\int\limits_A^B\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}\left[\operatorname{arctg}B-\operatorname{arctg}A\right]=$$

$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ жыйналуучу өздүк эмес интеграл.

3. Эң бир маанилүү

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{c}{x^\alpha}dx,\quad c>0 \text{ жана } \alpha>0$$

интегралын карайлы. Бул интеграл $\alpha>1$ маанисинде жыйналат жана $\alpha\leqslant 1$ маанисинде таралат. Чындыгында эле

$$\int\limits_a^B\frac{c}{x^\alpha}dx=\begin{cases} c\ln\frac{B}{a}, & \text{эгерде } \alpha=1,\\ c\frac{B^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{эгерде } \alpha\neq 1\end{cases}$$

жана ошондуктан

$$\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^B\frac{c}{x^\alpha}dx=\begin{cases} c\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{эгерде } \alpha>1 \text{ болсо},\\ +\infty, & \text{эгерде } \alpha\leqslant 1 \text{ болсо}.\end{cases}$$

Ушул интегралды башка көп өздүк эмес интегралдар менен салыштырып, алардын жыйналышын же таралышын аныктайбыз. Ушунусу менен бул интеграл маанилүү.

1. Өздүк эмес интегралдар үчүн Кошинин критерийи

Өздүк эмес

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx \tag{1}$$

интегралынын жыйналышы

$$F(B)=\int\limits_a^B f(x)dx \tag{4}$$

функциясынын $B \to +\infty$ да анык чектүү пределге ээ болушу менен барабар. Эгерде ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $B(\varepsilon)$ саны аныкталып, бардык B' жана $B'' > B(\varepsilon)$ болгондо $|F(B'') - F(B')| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда Кошинин критерийинин (III гл., 1-бөлүк) негизинде $B \to +\infty$ да $F(B)$ функциясы чектелген анык пределге ээ болот. Ушул барабарсыздыкка (4) интегралды коюп биз төмөнкүгө келебиз.

Кошинин критерийи (интеграл үчүн). Өздүк эмес $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жыйналыш үчүн ар кандай $\varepsilon > 0$ санына туура келген $B(\varepsilon)$ саны аныкталып, бардык B' жана $B'' > B(\varepsilon)$ болгондо

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{5}$$

барабарсыздыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү, б.а.

$$\int_{B'}^{B''} f(x)dx \tag{5'}$$

интегралы B' жана $B'' \to +\infty$ да нөлгө умтулган учурда.

Көпчүлүк учурда (5) Кошинин критерийин конкреттүү интегралдардын жыйналышын изилдөөгө түздөн-түз колдонууга болот.

Мисалы. Биз $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ интегралын карайлы (интеграл алдындагы функция үзгүлтүксүз болуш үчүн $x = 0$ болсо, 1ге барабар деп эсептейбиз).

Δ Бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонобуз:

$$\int_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos B'}{B'} - \frac{\cos B''}{B''} - \int_{B'}^{B''} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Анда

$$\left|\int_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x} dx\right| \leqslant \frac{1}{B'} + \frac{1}{B''} + \left|\int_{B'}^{B''} \frac{|\cos x|}{x^2} dx\right| \leqslant \frac{1}{B'} + \frac{1}{B''} + \left|\int_{B'}^{B''} \frac{dx}{x^2}\right| \leqslant \frac{2}{B'} + \frac{2}{B''} \to 0.$$

$$B' \text{ жана } B'' \to +\infty .$$

Ошентип,

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{интегралы жыйналат.} \ \blacktriangle$$

2. Өздүк эмес интегралдын абсолюттуу жыйналуучулугу

Сан катары сыяктуу эле (VIII гл., §3) өздүк эмес интегралдардын да абсолюттуу жыйналуучулугун карасак болот.

Аныктама. *Берилген $f(x)$ интегралы ар кандай чектелген $a \leqslant x \leqslant B$, $a < B < +\infty$ аралыкта интегралдануучу функция болсун. Эгерде*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \tag{6}$$

өздүк эмес интегралы жыйналса, анда (1) интегралды абсолюттуу жыйналуучу интеграл деп айтабыз.

1-теорема. *Эгерде (1) интеграл абсолюттуу жыйналса, анда ал жыйналат.*

○ Чындыгында эле (6) интегралдын жыйналышынан, ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $B(\varepsilon)$ саны аныкталып, бардык B' жана $B'' > B(\varepsilon)$ болгондо

$$\left| \int_{B'}^{B''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылат. Бирок, дайыма

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)dx \right| \leqslant \left| \int_{B'}^{B''} |f(x)|dx \right|. \tag{7}$$

Ошондуктан

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)dx \right| \leqslant \left| \int_{B'}^{B''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon, \ \forall B',\ B'' > B(\varepsilon),$$

б.а. (1) интегралга Кошинин критерийи орун алат. Демек, (1) интеграл жыйналат. ●

Эскертүү. Берилген $f(x)$ функциясы $a \leqslant x < +\infty$ аралыгында аныкталсын жана ар бир чектүү $a \leqslant x \leqslant B$ аралыгында интегралдануучу болсун. Анда ар кандай $a_1 > a$ маани үчүн $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ интегралынын абсолюттуу жыйналышынан $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ интегралынын абсолюттуу жыйналуучулугу келип чыгат, анткени ар бир $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ жана $\int_{a_1}^{+\infty} |f(x)|dx$ интегралдарынын жыйналышы үчүн

$$\int_{B'}^{B''} |f(x)|dx \to 0, \qquad \forall B', B'' \to +\infty$$

аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

2-теорема (салыштыруу белги). *Эгерде жетиштүү чоң x үчүн*

$$|f(x)| \leqslant g(x) \tag{8}$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда

$$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx \tag{9}$$

интегралынын жыйналышынан

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \tag{10}$$

интегралынын абсолюттуу жыйналуучулугу келип чыгат.

○ Берилген $f(x)$ ар бир чектүү $a \leqslant x \leqslant B$, $a < B < +\infty$ интервалында интегралдануучу болгондуктан, ал интегралга Кошинин критерийи орун алат жана (8) барабарсыздыктын негизинде ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн $B(\varepsilon)$ маани аныкталып бардык B' жана $B'' > B(\varepsilon)$ болгондо

$$\left|\int_{B'}^{B''}|f(x)|dx\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} g(x)dx\right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылат, б.а. Кошинин критерийи $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интегралында да орун алат. Ошондуктан $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интегралы жыйналат, бул (10) интегралдын абсолюттуу жыйналышын билгизет. ●

Алдыдагы 3-мисалда биз $a > 0$ жана $c > 0$ маанисинде

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{cdx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B}\frac{cdx}{x^\alpha} = \begin{cases} c\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{эгерде } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{эгерде } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

экендигин көрсөткөнбүз. Мындан жана 2-теоремадан төмөнкү теорема келип чыгат.

3-теорема (практикалык салыштыруу белги). *Бизге*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

өздүк эмес интегралы берилсин:

1. *Эгерде бардык x тин мүмкүн болгон чоң маанисинде $|f(x)| < \frac{c}{x^\alpha}$, $c \geqslant 0$ жана $\alpha > 1$ барабарсыздыгы аткарылса, анда берилген интеграл абсолюттуу жыйналат.*

2. *Ал эми, эгерде бардык x тин мүмкүн болгон чоң маанисинде $f(x) \geqslant \frac{c}{x^\alpha}$ же эгерде бардык x тин мүмкүн болгон чоң маанисинде $f(x) \leqslant -\frac{c}{x^\alpha}$, $c \geqslant 0$ жана $\alpha \leqslant 1$ барабарсыздыктары аткарылса, анда ал интеграл таралат.*

○ 1) Алдыңкы 2-теоремадагы $g(x) < \frac{c}{x^{\alpha}}$ деп жана $\alpha > 1$ маанисинде $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = c\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = c\,\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ $(a > 0)$ жыйналгандыгын эске алсак, анда берилген интегралдын абсолюттуу жыйналышы өзү эле келип чыгат.

2) Эми $f(x) \geqslant \frac{c}{x^{\alpha}}$, $c > 0$ жана $\alpha \leqslant 1$, $\forall x \geqslant a_1 > a$ болсун. Бул учурда a_1 ден B га чейин интегралдасак, анда $\int\limits_{a_1}^{B} f(x)dx \geqslant$ $\geqslant c\int\limits_{a_1}^{B}\frac{dx}{x^{\alpha}} \to +\infty$, $B \to +\infty$, анткени $\alpha \leqslant 1$, ошол үчүн $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ интегралы таралат, анда берилген интеграл дагы таралат.

Ал эми, эгерде $f(x) = -\frac{c}{x^{\alpha}}$, $\forall x \geqslant a_1 > a > 0$, $c > 0$ жана $\alpha \leqslant 1$ болсо, анда $f^*(x) = -f(x)$ десек, биз $f^*(x) \geqslant \frac{c}{x^{\alpha}}$, $\forall x \geqslant a_1 > a > 0$ алабыз жана $\int\limits_a^{+\infty} f^*(x)dx$ таралуу интеграл болот, бул интеграл менен кошо берилген интеграл дагы таралат, себеби

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f(x)dx = -\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f^*(x)dx. \quad \bullet$$

3. Өздүк эмес интегралдын шарттуу жыйналуучулугу

Аныктама. *Эгерде өздүк эмес* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *интегралы таралуучу интеграл болсо, анда берилген* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *интегралын шарттуу жыйналуучу интеграл деп айтабыз.*

Шарттуу жыйналуучу интеграл үчүн Абелдин белгиси орун алат.

4-теорема. $\varphi(x)$ *функциясы үзгүлтүксүз болсун, ал эми* $g(x)$ *функциясы* $a \leqslant x < +\infty$ *аралыгында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болсун. Анда*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx \tag{11}$$

интегралы жыйналат, эгерде $\Phi(B) = \int_a^B \varphi(x)dx$ *баштапкы функция* $a \leqslant B < +\infty$ *аралыгында чектелсе, ал эми* $g(x)$ *функциясы* $x \to +\infty$ *да монотондуу келип, нөлгө умтулса.*

Мисалдар: 1. $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $\alpha > 0$ интегралы жыйналат, анткени

$$\varphi(x) = \sin x \text{ жана } g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ десек, анда}$$

$$|\Phi(x)| = \left|\int_\pi^x \varphi(x)dx\right| = \left|\int_\pi^x \sin x dx\right| = |\cos\pi - \cos x| \leqslant 2,$$

$\pi \leqslant x < +\infty$ үчүн, ал эми $x \to +\infty$ да $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \to 0$ жана $\alpha > 0$.

2. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin x}{x} dx$ интегралы Абелдин белгиси боюнча жыйналат. Мында $\varphi(x) = \sin x, g(x) = \frac{\ln x}{x}$ деп алуу жетиштүү.

3. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)dx$ Френелдин интегралы да жыйналат. Мында $x^2 = t$ десек, $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$ интегралын алабыз жана ал Абелдин белгиси боюнча жыйналат.

§ 2. ЧЕКТЕЛБЕГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫН ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛЫ

Аныктама. *$f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралыгынын чектүү чекиттеринен башка бардык чекиттеринде аныкталсын. Эгерде $x = b$ чекити $f(x)$ функциясы үчүн өзгөчө чекит болсо жана $\int\limits_{a}^{b-\mu} f(x)dx$ интегралы ар бир интервал μ, $0 < \mu < b - a$ маанисинде бар болсо, анда $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы деп*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\mu \to +0} \int\limits_{a}^{b-\mu} f(x)dx \qquad (12)$$

пределин айтабыз.

Эгерде ушул предели бар болуп жана чектүү болсо, анда (12) интегралды жыйналат деп, ал эми тескерисинче болсо таралат деп айтышат.

Ушул эле сыяктуу, эгерде $x = a$ өзгөчө чекит болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{a+\lambda}^b f(x)dx, \tag{13}$$

же $x = a$ жана $x = b$ өзгөчө чекиттер болгон учурда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to +0 \\ \mu \to +0}} \int_{a+\lambda}^{b-\mu} f(x)dx, \tag{14}$$

же болбосо ички $x = c, a < c < b$ өзгөчө чекит болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to +0 \\ \mu \to +0}} \left[\int_a^{c-\mu} f(x)dx + \int_{c+\lambda}^b f(x)dx \right] \tag{15}$$

формулалар орун алат.

Эми биз чектелбеген функциялар үчүн өздүк эмес интегралдардын жыйналуу шарттарына токтололу. Ал үчүн, мындан ары (12) өздүк эмес интегралды карайбыз, калган интегралдар ушул интегралга келтирилет.

1. Кошинин критерийи ((12) өздүк эмес интеграл үчүн)

Алдыңкы (12) өздүк эмес интеграл жыйналыш үчүн ар кандай $\varepsilon > 0$ санына $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны аныкталып, бардык $0 < \mu'$, $\mu'' > \delta(\varepsilon)$ болгондо

$$\left| \int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү шарт болуп саналат.

Ушундай эле Кошинин критерийин (13)—(15) интегралдарга да келтирүүгө болот. Ал эми (14) жана (15) интегралдары жыйналыш үчүн $\int_a^c f(x)dx$ жана $\int_c^b f(x)dx$ интегралдарынын жыйналышы зарыл жана жетиштүү экендигин далилдөөгө болот жана мындан $x = c, a < c < b$ чекити эрктүү түрдө алынган, (14) жана (15) интегралдар жыйналган учурда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{16}$$

барабардыгы аткарылат.

Ушул эле жыйынтыктарды $[a,b]$ аралыгында чектүү сандагы өзгөчө чекиттер болсо да айтууга болот, бирок бул учурда $[a,b]$ аралыгын бир учу өзгөчө чекитке дал келгендей кылып бөлүктөргө бөлүү зарыл.

2. Салыштыруу белгиси

Эгерде b жалгыз гана $[a,b]$ аралыгында $f(x)$ функциясы үчүн өзгөчө чекит болсо жана бардык $x \in [a,b]$ маанилеринде $|f(x)| \leqslant g(x)$ аткарылса, анда $\int_a^b g(x)dx$ интегралынын жыйналышынан $\int_a^b f(x)dx$ интегралынын абсолюттук жыйналышы келип чыгат.

Практикада, көбүнчө $g(x) = \dfrac{c}{(b-x)^{\alpha}}$, $0 \leqslant c < +\infty$, $\alpha < 1$ функциясын алышат. Анда, Кошинин критерийи боюнча

$$\left|\int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int_{b-\mu'}^{b-\mu''} |f(x)|dx\right| \leqslant c\left|\int_{b-\mu'}^{b-\mu''} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}\right| = c\left|\frac{(\mu')^{1-\alpha} - (\mu'')^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right| \to 0,$$

анткени $\alpha < 1$ жана $\mu', \mu'' \to 0$. Ошентип, $\int_a^b f(x)dx$ жана $\int_a^b |f(x)|dx$ интегралдары жыйналат.

Мисалдар: 1. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ интегралынын жыйналышын аныктагыла. Интеграл алдындагы функция үчүн $x = 1$ өзгөчө чекит. Ошондуктан

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\mu\to+0}\int\limits_{-1}^{1-\mu}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\lambda\to+0}\int\limits_{1+\lambda}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim 3\sqrt[3]{x-1}\,\Big|_{-1}^{1-\mu} +$$

$$+\lim_{\lambda\to+0} 3\sqrt[3]{x-1}\,\Big|_{1+\lambda}^{2} = 3\lim_{\mu\to+0}\left(\sqrt[3]{-\mu}+\sqrt[3]{-2}\right)+$$

$$+3\lim_{\lambda\to+0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\lambda}\right) = 3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

2. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$ өздүк эмес интегралын эсептегиле. Мында $x = 2$ өзгөчө чекит. Берилген интегралды эсептөө үчүн $x = 2\sin t$ алмаштыруусун алабыз. Анда $dx = 2\cos t dt,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Демек,

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = 8\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}dt = 8\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^3 t dt =$$

$$= 8\int\limits_{\pi/2}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t) = 8\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{16}{3}.$$

Бул интегралда алмаштыруунун негизинде өздүк эмес интеграл кадимки анык интегралга өтүп кетти. Ушундай алмаштыруунун негизинде аныктык интеграл өздүк эмес интегралга да өтүшү мүмкүн.

II. ПАРАМЕТРДЕН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН ИНТЕГРАЛДАР

§ 1. ПАРАМЕТРДЕН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН ӨЗДҮК ИНТЕГРАЛДАР

Биз эки x жана α өзгөрмөлөрдөн көз каранды болгон $f(x,\alpha)$ функциясын карайлы жана ал

$$D:\left[a \leqslant x \leqslant b,\ \beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma\right]$$

тик бурчтугунда аныкталсын жана ар бир $\alpha \in [\beta,\gamma]$ маанисинде $[a,b]$ аралыгында x боюнча интегралдануучу функция болсун. Анда интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx, \tag{1}$$

α параметринен көз каранды болуп, $[\beta,\gamma]$ аралыгында берилген функция болот. Ушул функцияга карата сөзсүз төмөнкү суроолор болушу мүмкүн: ал үзгүлтүксүз болобу, дифференцирленүүчүбү, анын интегралы жана туундусу кандай туюнтмада болот. Ошондуктан биз (1) интегралдын касиеттерин үйрөнөбүз.

1-теорема (интегралдын параметрден үзгүлтүксүздүгү).

Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ функциясы туюк D тик бурчтугунда үзгүлтүксүз болсо жана 2) a, b, турактуу болушса, анда $\Phi(\alpha)$ функциясы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α параметринен үзгүлтүксүз функция болот.

○ Биз $\Phi(\alpha)$ функциясынын ар кандай $\alpha \in [\beta,\gamma]$ чекитинде үзгүлтүксүз экендигин көрсөтөлү. Ал үчүн аргументке $\Delta\alpha$ өсүндүсүн берип, ага туура келген функциянын өсүндүсүн табалы:

$$\Delta\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha + \Delta\alpha) - \Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha + \Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx =$$

$$= \int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]dx.$$

Эми эрктүү $\varepsilon > 0$ саны берилсин. Шарт боюнча $f(x,\alpha)$ функциясы чектелген туюк D областында үзгүлтүксүз болгондуктан Кантордун теоремасы боюнча ал ошол эле D да бир калыпта үзгүлтүксүз болот жана $\frac{\varepsilon}{b-a}$ оң саны үчүн $\delta > 0$ саны аныкталып,

$$|f(x_2,\alpha+\Delta\alpha) - f(x_1,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

барабарсыздыгы ар кандай (x_1,α), $(x_2,\alpha+\Delta\alpha)$ чекиттери үчүн орун алат, качан гана $|x_2 - x_1| < \delta$ жана $|\Delta\alpha| < \delta$ барабарсыздыктары аткарылганда. Айрым учурда, $x_1 = x_2 = x$ болсун десек, анда $|\Delta\alpha| < \delta$ дан

$$|f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

барабарсыздыгы келип чыгат. Ошентип,

$$|\Delta\Phi(\alpha)| = \left|\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)|dx <$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \quad \bullet$$

Ушул далилденген теоремадан

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \Phi(\alpha+\Delta\alpha) = \Phi(\alpha),$$

б.а.

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b \left[\lim_{\Delta\alpha\to 0} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\right]dx$$

барабардыгы келип чыгат. Демек, теореманын шарты орун алса эле, интеграл алдына α параметри боюнча пределге өтүүгө болот.

2-теорема. *Эгерде $f(x,\alpha)$ функциясы D да үзгүлтүксүз болсо, анда*

$$F(u,v,\alpha)=\int_u^v f(x,\alpha)dx \tag{2}$$

интегралы ар бир u, v, α $(a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b,\ \beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma)$ аргументтери боюнча үзгүлтүксүз функция болот.

○ Биз

$$\lim_{\rho\to 0} F(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ \alpha+\Delta\alpha)=F(u,v,\alpha)$$

барабардыгын далилдешибиз керек, мында

$$\rho=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta\alpha^2}.$$

Ал үчүн

$$F(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\alpha+\Delta\alpha)=\int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx=\int_u^v f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+$$

$$+\int_{u+\Delta u}^{u} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx+\int_v^{v+\Delta v} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx \tag{3}$$

барабардыгын карайлы. Бул барабардыктын биринчи кошулуучусунун $\rho\to 0$ да предели бар жана $F(u,v,\alpha)$ барабар (1-теореманын негизинде), анткени $f(x,\alpha)$ үзгүлтүксүз, ал эми u жана v турактуу. Экинчи жана үчүнчү кошулуучулар $\rho\to 0$ да нөлгө умтулушат, себеби $f(x,\alpha)$ функциясы чектелген туюк D областында, чектелген, ошондуктан ал кошулуучулар абсолюттук чоңдугу боюнча $M|\Delta u|$ жана $M|\Delta v|$ маанилерден кичине болот, мында M саны $|f(x,\alpha)|$ нын D областындагы жогорку чеги.

Ошентип,

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx=\int\limits_{u}^{v} f(x,\alpha)dx.\ \bullet$$

3-теорема. *Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ функциясы D да үзгүлтүксүз болсо, 2) $a(\alpha)$ жана $b(\alpha)$ функциялары $[\beta,\gamma]$ аралыгында берилип, α өзгөрмөсүнөн үзгүлтүксүз болушса, 3) $\beta\leqslant\alpha\leqslant\gamma$ маанилеринде $a\leqslant a(\alpha)\leqslant b(\alpha)\leqslant b$ болсо, анда*

$$\psi(\alpha)=\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx \tag{4}$$

интегралы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α параметринен үзгүлтүксүз функция болот. (Бул теорема 1-теореманын кеңейтилген учуру.)

○ Чындыгында $\psi(\alpha)=F[a(\alpha),b(\alpha),\alpha]$ барабардыгы орун алат. ((2) ни кара), ал эми 2-теореманын негизинде $F(u,v,\alpha)$ функциясы ар бир аргументтери боюнча үзгүлтүксүз, анда теореманын 2-жана 3-шарттары жана татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү теорема боюнча, теорема түздөн-түз далилденген болот. ●

Ушул теореманын негизинде

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_{a(\alpha)+\Delta a}^{b(\alpha)+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx$$

барабардыгы келип чыгат.

4-теорема (интегралды параметр боюнча дифференцирлөө).

Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ жана $f'_\alpha(x,\alpha)$ функциялары D да үзгүлтүксүз болушса; 2) a жана b турактуу болсо, анда

$$\Phi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx,$$

функциясы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α боюнча туундуга ээ болот жана ал туунду

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx \tag{5}$$

барабардыгы менен аныкталат. Алынган формула Лейбництин формуласы же эрежеси деп аталат.

○ Биз

$$\Lambda\Phi(\alpha) = \int_a^b \left[f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)\right]dx$$

өсүндүсүн карап, α боюнча үзгүлтүксүз жана дифференцирленүүчү $f(x,\alpha)$ функциясына Лагранждын теоремасын колдонсок, анда

$$\Delta\Phi(\alpha) = \int_a^b \Delta\alpha f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)dx$$

барабардыгын алабыз, $0 \leqslant \theta < 1$. Мындан

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)dx \tag{6}$$

барабардыгы келип чыгат. Эми $f'_\alpha(x,\alpha)$ функциясы D да бир калыпта үзгүлтүксүз болгондуктан кандай гана $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\frac{\varepsilon}{b-a}$ санын алсак, анда $\delta > 0$ саны аныкталып, $|x'-x''| < \delta$ жана $|\alpha'-\alpha''| < \delta$ барабарсыздыктарынан

$$|f'_\alpha(x',\alpha') - f'_\alpha(x'',\alpha'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

барабарсыздыгы келип чыгат. Айрым учурда $x' = x'' = x$, $\alpha' = \alpha$ жана $\alpha'' = \alpha + \theta\Delta\alpha$ десек, анда $|\Delta\alpha| < \delta$ дан

$$|f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

барабарсыздыгы орун алат. Анда

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\alpha} - \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

айырмасын, (6) эске алып, чамалайбыз:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta\alpha}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\right|=\left|\int_a^b[f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha)]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\left|f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha)\right|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Ошентип, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta\alpha}$ катышы $\Delta\alpha\to 0$ пределге ээ болот:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta\alpha}=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx. \bullet$$

5-теорема. *Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ жана $f'_\alpha(x,\alpha)$ D областында үзгүлтүксүз болушса; 2) $a(\alpha)$ жана $b(\alpha)$ функциялары $[\beta,\gamma]$ аралыгында берилип, дифференцирленүүчү болушса жана 3) $a\leqslant a(\alpha)\leqslant b(\alpha)\leqslant b$ барабарсыздыгы $\beta\leqslant\alpha\leqslant\gamma$ үчүн аткарылса, анда*

$$\psi(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx$$

функциялары $[\beta,\gamma]$ аралыгында α боюнча туундуга ээ болот жана ал туунду

$$\frac{d\psi}{d\alpha}=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx+b'(\alpha)f[b(\alpha),\alpha]-a'(\alpha)f[a(\alpha),\alpha] \tag{7}$$

формуласы аркылуу аныкталат.

○ Мында татаал $\psi(\alpha)=F[a(\alpha),b(\alpha)\alpha]$, $F(u,v,\alpha)$ функциясы (2) формула аркылуу берилген, функциянын туундусу жөнүндө сөз болушу мүмкүн. Ошондуктан, эгерде биз айрым F'_u, F'_v жана F'_α туундулары бар жана үзгүлтүксүз экендигин далилдесек эле, анда 2 жана 3 шарттын негизинде $\frac{d\psi}{d\alpha}$ туунду бар экендигин жана

$$\frac{d\psi}{d\alpha}=\frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{db(\alpha)}{d(\alpha)}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{da(\alpha)}{d\alpha} \qquad (8)$$

барабардыгы орун аларын бекемдөөгө болот.

Эми F'_α бар болушу 4-теоремадан келип чыгат жана

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}=\int_u^v f'_\alpha(x,\alpha)dx,$$

2-теореманын негизинде ар бир u,v,α аргументтери боюнча үзгүлтүксүз. F'_v жана F'_u туундулар, анык интегралдын жогорку жана төмөнкү пределдери боюнча туунду алуу эрежесинин негизинде алынат:

$$\frac{\partial F}{\partial v}=f(v,\alpha), \qquad \frac{\partial F}{\partial u}=-f(u,v)$$

алардын үзгүлтүксүздүгү теореманын шарты менен аткарылат. Аныкталгандарды (8) формулага коюп, $u=a(\alpha)$ жана $v=b(\alpha)$ десек, (7) формула келип чыгат.

6-теорема (интегралды параметр боюнча интегралдоо). *Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ функциясы D да үзгүлтүксүз болсо жана 2) a, b турактуу болушса, анда*

$$\int_\beta^\gamma \Phi(\alpha)d\alpha=\int_\beta^\gamma d\alpha\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b dx\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha \qquad (9)$$

формуласы орун алат, б.а. (1) интегралды α параметри боюнча интегралдоо үчүн интеграл алдындагы $f(x,\alpha)$ функциясын ошол α параметри боюнча интегралдоо жетиштүү.

○ $\Phi(\alpha)$ функциясы 1-теорема боюнча үзгүлтүксүз, ошондуктан $[\beta,\gamma]$ аралыгында интегралдануучу функция болот. Ал эми (9) барабардык кош интегралды кайталанган интегралга келтирүү теоремасынын натыйжасында келип чыгат (ал жыйынтыкка XII гл. §2 токтолобуз).

Биз дагы башка далилдөөгө токтололу. Ал үчүн (9) барабардыктын ордуна

$$\int_{\beta}^{t} d\alpha \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx = \int_{a}^{b} dx \int_{\beta}^{t} f(x,\alpha)d\alpha, \quad (\beta \leqslant t \leqslant \gamma) \tag{10}$$

барабардыкты карайлы. Эгерде

$$\varphi(t) = \int_{\beta}^{t} d\alpha \int_{a}^{b} f(x,\alpha)dx, \quad \psi(t) = \int_{a}^{b} dx \int_{\beta}^{t} f(x,\alpha)d\alpha$$

белгилөөсүн колдонсок, анда (1) функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн

$$\varphi'(t) = \int_{a}^{b} f(x,t)dx \text{ жана } \psi'(t) = \int_{a}^{b} f(x,t)dx, \quad (\beta \leqslant t \leqslant \gamma)$$

келип чыгат жана $\varphi'(t) = \psi'(t)$. Демек, $\varphi(t) = \psi(t) + c$ барабардыгы $[\beta,\gamma]$ аралыгында аткарылат. Бирок $\varphi(\beta) = \psi(\beta) = 0$ болгондуктан, $[\beta,\gamma]$ аралыгында $\varphi(t) = \psi(t)$. Бул барабардыкка $t = \gamma$ десек, (9) формуланы далилдеген болобуз. ●

§2. ПАРАМЕТРДЕН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

Биз x жана α өзгөрмөлөрүнөн көз каранды болгон $f(x,\alpha)$ функциясы

$$E:[a \leqslant x < \infty, \ \beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma]$$

областында аныкталсын дейли жана ар бир $\alpha \in [\beta,\gamma]$ маанисинде өздүк эмес

$$J(\alpha) = \int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)dx \tag{11}$$

интегралы бар болсун. Бул акыркы, ар бир $\alpha \in [\beta,\gamma]$ маанисинде жана $A > a$ болгондо

$$F(\alpha, A) = \int_a^A f(x,\alpha)dx \tag{12}$$

интегралы жана чектүү

$$J(a) = \lim_{A\to+\infty} F(a, A) \tag{13}$$

предели бар болот дегендикке жатат. Ушул предел $\beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma$ аралыгында берилип, α параметринен функция болот.

Аныктама. *Эгерде ар кандай* $\varepsilon > 0$ *саны үчүн* α *параметринен көз каранды болбогон* M_ε *саны аныкталып,* $A > M_\varepsilon$ *болгондо*

$$|J(a) - F(a, A)| = \left|\int_A^\infty f(x, a)dx\right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы бардык $\alpha \in [\beta, \gamma]$ *маанисинде бир мезгилде орун алса, анда (11) интегралды* α *параметри боюнча* $[\beta, \gamma]$ *аралыгында бир калыпта жыйналат деп айтабыз.*

Мисалы,

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha x} dx\,,\ (\alpha \geqslant 0) \tag{14}$$

интегралын карайлы. Бул интегралдын мааниси

$$J(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } \alpha = 0 \\ 1, & \text{эгерде } \alpha > 0 \end{cases}$$

болорун билүү кыйын эмес. Эми биз кандайдыр бир $[\beta, \gamma]$ $(\beta > 0)$ аралыгын алалы. Анда

$$|J(\alpha) - F(\alpha, A)| = \int_A^\infty \alpha\, e^{-\alpha x} dx = e^{-A\alpha}.$$

Ар бир $\varepsilon > 0$ үчүн жана ар бир турактуу $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисинде

$$e^{-A\alpha} < \varepsilon$$

барабарсыздыгы, айрым учурда, $A > M_\varepsilon = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ маанисинде жетише алат. Мында M_ε үчүн α дан көз каранды болбогон $\frac{1}{\beta}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ санын алууга болот. Демек, бул учурда (14) интеграл $[\beta,\gamma]$ $(\beta > 0)$ аралыгында α параметрине карата бир калыпта жыйналат.

Эгерде $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma$ аралыгын карасак, анда башкача жыйынтыкка келебиз. Чындыгында эле $\lim\limits_{\alpha\to 0} e^{-A\alpha} = 1$ болгондуктан $\varepsilon < 1$ үчүн кандай гана A ны албасак деле нөлгө жакын болгон α' маани табылып, $e^{-A\alpha'} > \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылып калат. Ошондуктан $[0,\gamma]$ $(\gamma > 0)$ аралыгында (14) интегралдын α га карата жыйналышы бир калыпта эмес.

7-теорема (Вейерштрасстын белгиси). *Эгерде $a \leqslant x \leqslant \infty$ аралыгында $\varphi(x)$ функциясы аныкталып жана 1) $|f(x,\alpha)| < \varphi(x)$ барабарсыздыгы бардык $(x,\alpha) \in E$ үчүн аткарылса жана 2) $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ интегралы жыйналса, анда $\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ интегралы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α параметри боюнча бир калыпта жыйналат.*

○ Теореманын биринчи шартынан бардык $x \geqslant a$ маанисинде $\varphi(x) \geqslant 0$ экендиги, ал эми 2-шартынан ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн $M_{\varepsilon/2}$ саны аныкталып, $A'' \geqslant A' > M_{\varepsilon/2}$ болгондо

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} \varphi(x)dx\right| = \int\limits_{A'}^{A''} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

барабарсыздыгы аткарылары келип чыгат. Анда ошол эле $M_{\varepsilon/2}$, A', A'' жана $\alpha \in [\beta,\gamma]$ маанилер үчүн, теореманын 1-шарты боюнча

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant \int_{A'}^{A''} |f(x,\alpha)|dx < \int_{A'}^{A''} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

барабарсыздыгын алабыз.

Ошентип, ар кандай $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисинде

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x,\alpha)dx = \int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx \tag{16}$$

предели аныкталат. Ушул (16) интегралдын бир калыпта жыйналышын аныктоо үчүн (15) барабарсыздыкка $A'' \to +\infty$ пределге өтүү жетиштүү.

Анда

$$\left|\int_{A'}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

барабарсыздыгы алынат жана ал бардык $A' > M_{\varepsilon/2}$ жана $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанилеринде туура болот. Ошентип, (16) интеграл бир калыпта жыйналат. ●

8-теорема (Кошинин критерийи). ***Берилген $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ интегралы $[\beta, \gamma]$ аралыгында бир калыпта жыйналыш үчүн ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн M_ε саны аныкталып, бардык A' жана $A'' > M_\varepsilon$ болгондо***

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon \tag{17}$$

барабарсыздыгынын бир мезгилде бардык $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисинде аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ **Зарыл шарты.** (11) интеграл бир калыпта жыйналсын деп (17) барабарсыздыгынын орун алышын көрсөтөлү. Чындыгында эле (11)интегралдын бир калыпта жыйналышынан ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн M_ε саны аныкталып, бардык $A' > M_\varepsilon$ жана бардык $A'' > M_\varepsilon$ болгондо

$$\left|\int_{A'}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{жана} \quad \left|\int_{A''}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

барабарсыздыктары бир мезгилде $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисинде орун алат. Ошондуктан, бардык A' жана $A'' > M_\varepsilon$ болгондо, бир мезгилде $\alpha \in [\beta, \gamma]$ үчүн

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_{A'}^{\infty} f(x,\alpha)dx - \int_{A''}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant \left|\int_{A'}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| +$$

$$+\left|\int_{A''}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

барабарсыздыгы орун алат.

Жетиштүү шарты. Эгерде бардык A' жана $A'' > M_\varepsilon$ үчүн (17) шарт бир мезгилде $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисинде орун алса, анда $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ интегралы жыйналат жана (17) барабарсыздыкка, $A'' \to +\infty$ пределге өтсөк, анда бардык $A' > M_\varepsilon$ үчүн

$$\left|\int_{A'}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant \varepsilon$$

барабарсыздыгы бир мезгилде бардык $\alpha \in [\beta, \gamma]$ үчүн орун алат. ●

Эми биз (11) интегралдын касиеттерине токтололу.

9-теорема (интегралдын параметрден үзгүлтүксүздүгү). *Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ функциясы E де үзгүлтүксүз болсо жана*

2) $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ интегралы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α параметри боюнча бир калыпта жыйналса, анда

$$J(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx \tag{11}$$

интегралы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α параметринен үзгүлтүксүз функция болот.

○ Эрктүү $\varepsilon > 0$ санын алабыз жана 2-шартты колдонуп, $\frac{\varepsilon}{3}$ үчүн $M_{\varepsilon/3}$ аныкталып, $A > M_{\varepsilon/3}$ болгондо

$$|J(\alpha) - F(\alpha,A)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{18}$$

барабарсыздыгы бардык $\alpha \in [\beta,\gamma]$ маанисинде орун алат, мында

$$F(\alpha,A) = \int_a^{A} f(x,\alpha)dx.$$

$A = A_0 > M_{\varepsilon/3}$ маанисин турактуу кылып жана эрктүү $\alpha = \alpha_0 \in$ $\in [\beta,\gamma]$ маанисин алабыз. Анда 1-теореманын негизинде $F(\alpha, A_0)$ параметр α боюнча үзгүлтүксүз функция, ошондуктан $\delta > 0$ саны аныкталып бардык $\alpha \in [\beta,\gamma]$ үчүн $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ шартынын канааттандырылышынан

$$|F(\alpha,A_0) - F(\alpha_0,A_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

барабарсыздыгы аткарылышы келип чыгат. Ошондой α нын бир маанисин алып, $J(\alpha)-J(\alpha_0)$ айырмасын чамалайбыз. Алдыңкы (18) жана (19) эске алсак, анда

$$|J(\alpha)-J(\alpha_0)|=|J(\alpha)-F(\alpha,A_0)+F(\alpha,A_0)-F(\alpha_0,A_0)+$$

$$+F(\alpha_0,A_0)-J(\alpha_0)|\leqslant|J(\alpha)-F(\alpha,A_0)|+$$

$$+|F(\alpha,A_0)-F(\alpha_0,A_0)|+|F(\alpha_0,A_0)-J(\alpha_0)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \tag{20}$$

Ошентип, $J(\alpha)$ функциясынын ар кандай $\alpha_0\in[\beta,\gamma]$ чекитинде үзгүлтүксүз экендиги далилденди. ●

10-теорема (интегралды параметр боюнча интегралдоо). *Эгерде: 1) $f(x,\alpha)$ функциясы E де үзгүлтүксүз болсо жана 2) $\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ интегралы $[\beta,\gamma]$ аралыгында α боюнча бир калыпта жыйналса, анда (11) интегралды α параметри боюнча интегралдоого болот жана*

$$\int\limits_\beta^\gamma J(\alpha)d\alpha=\int\limits_\beta^\gamma d\alpha\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha \tag{21}$$

формуласы орун алат.

○ 9-теорема боюнча $J(\alpha)$ функциясы үзгүлтүксүз, ошондуктан ал $[\beta,\gamma]$ аралыгында интегралданууучу болот. Ушул $J(\alpha)$ функциясын

$$J(\alpha)=\int\limits_a^A f(x,\alpha)dx+\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$$

түрүндө жазалы. Анда

$$\int\limits_\beta^\gamma J(\alpha)d\alpha=\int\limits_\beta^\gamma d\alpha\int\limits_a^A f(x,\alpha)dx+\int\limits_\beta^\gamma d\alpha\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx. \tag{22}$$

Бул (22) барабардыктын биринчи кошулуучусунун интегралдоо багытын өзгөртүп (6-теореманы кара) жазалы:

$$\int_{\beta}^{\gamma} J(\alpha)d\alpha = \int_{a}^{A} dx\int_{\beta}^{\gamma} f(x,\alpha)d\alpha + \int_{\beta}^{\gamma} d\alpha\int_{A}^{\infty} f(x,\alpha)dx. \qquad (23)$$

Теоремадагы (21) шарты далилденет, эгерде биз (23) барабардыктын

$$\int_{\beta}^{\gamma} J(\alpha)d\alpha - \int_{a}^{A} dx\int_{\beta}^{\gamma} f(x,\alpha)d\alpha$$

айырмасына барабар болгон экинчи кошулуучусу $A \to +\infty$ да нөлгө умтуларын көрсөтсөк. Ал үчүн теореманын 2-шарты боюнча ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн $M = M_{\varepsilon/\gamma - b}$ аныкталып, $A > M$ болгондо

$$\left|\int_{A}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{\gamma - \beta}$$

барабарсыздыгы бардык $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисинде орун алат. Анда

$$\left|\int_{\beta}^{\gamma} d\alpha\int_{A}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leqslant \int_{\beta}^{\gamma}\left|\int_{A}^{\infty} f(x,\alpha)dx\right|d\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma - \beta}(\gamma - \beta) = \varepsilon.$$

Ошентип,

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\beta}^{\gamma} d\alpha\int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)dx = 0$$

жана (21) барабардык далилденди. ●

11-теорема (интегралды параметр боюнча дифференцирлөө). *Эгерде: 1)* $f(x,\alpha)$ *жана* $f'_{\alpha}(x,\alpha)$ *функциялары E де үзгүлтүксүз болушса; 2)* $J(\alpha) = \int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)dx$ *интегралы бардык*

$\alpha \in [\beta, \gamma]$ *маанисинде жыйналса; 3)* $j(\alpha) = \int_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$ *интегралы* $[\beta, \gamma]$ *да* α *боюнча бир калыпта жыйналса, анда*

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx = \int_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx \tag{24}$$

формуласы орун алат.

○ Кандайдыр бир параметрдин туруктуу $\alpha \in [\beta, \gamma]$ маанисин алабыз жана $[\beta, \gamma]$ аралыгын карайлы. Ушул аралыкта

$$j(\alpha) = \int_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

интегралы бир калыпта жыйналат, ошондуктан 10-теореманы колдонуп,

$$\int_\beta^{\alpha} j(\alpha)d\alpha = \int_a^{\infty} dx \int_\beta^{\alpha} f'_\alpha(x,\alpha)d\alpha = \int_a^{\infty}[f(x,\alpha) - f(x,\beta)]dx =$$

$$= J(\alpha) - J(\beta)$$

барабардыгына ээ болобуз. Ошентип,

$$J(\alpha) = J(\beta) + \int_\beta^{\alpha} j(\alpha)d\alpha. \tag{25}$$

Эми 9-теорема боюнча $J(\alpha)$ функциясы $[\beta, \gamma]$ аралыгында үзгүлтүксүз, ошондуктан $J(\alpha)$ туундуга ээ болот. Ал туундуну (25) барабардыкты жогорку предели боюнча дифференцирлеп алабыз, б.а.

$$\frac{dJ}{d\alpha} = j(\alpha)$$

жана бул (24) формуланы далилдейт. ●

Мисал катары кээ бир интегралдардын чыгарылыштарына көңүл буралы.

1. Дирихленин интегралы деп аталуучу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \tag{26}$$

интегралды эсептөө үчүн параметр киргизип, жалпы

$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \quad (\alpha \geqslant 0)$$

интегралын карасак болот. Бул интегралга $\alpha = 0$ десек, (26) интегралды берет. Ушул $J(\alpha)$ интеграл $\alpha \geqslant 0$ маанисинде a га карата бир калыпта жыйналат, ошондуктан 9-теореманын негизинде α параметринен үзгүлтүксүз. Айрым учурда

$$J(0) = \lim_{\alpha \to 0} J(a).$$

Эми α параметри боюнча туундусун табалы. 11-теореманын негизинде

$$J'(\alpha) = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Бул акыркы интеграл $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ маанисинде бир калыпта жыйналат, анткени

$$\left| e^{-\alpha x} \sin x \right| \leqslant e^{-\alpha_0 x}$$

жана

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$$

жыйналуучу интеграл (7-теорема). Ошентип,

$$J(\alpha) = c - \operatorname{arctg} \alpha.$$

Турактуу c чоңдукту аныктайлы. Ал үчүн

$$|J(\alpha)| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{a}$$

болгондуктан $\alpha \to \infty$, $J(\alpha) \to 0$. Анда $c = \frac{\pi}{2}$.

Демек,

$$J(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Пуассондун интегралы деп аталуучу

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \tag{27}$$

интегралдын чыгарылышына көңүл буралы.

Эгерде $t = x\alpha$, $\alpha > 0$ алмаштыруусун алсак, анда

$$J = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\,dx$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардыкты $e^{-\alpha^2}$ ка көбөйтүп, α боюнча 0 дөн $+\infty$ ге дейре интегралдайбыз:

$$J^2 = \int_0^{+\infty} J \cdot e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int_0^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,dx, \tag{28}$$

же интегралдоо багытын өзгөртүп (10-теорема),

$$J^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,d\alpha = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2(1+x^2)}}{2(1+x^2)}\Bigg|_0^{+\infty} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Мындан

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Жогорудагы (28) интегралдоо багытын өзгөртүү закондуу. Себеби $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}dx$ интегралы α параметри боюнча ар кандай $[\beta,\gamma] \subset (0,+\infty)$ аралыгында бир калыпта жыйналат, анткени $\left|\alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\right| \leqslant \gamma e^{-\beta^2(1+x^2)}$, ал эми $\int\limits_0^{+\infty} \gamma e^{-\beta^2(1+x^2)}dx$ жыйналуучу интеграл (7-теорема).

3. Лапластын интегралдары деп аталуучу

$$J_1(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx, \quad J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx \tag{29}$$

интегралдарга көңүл буралы. Эгерде $\alpha \geqslant \delta > 0$ болсо, анда эки интеграл тең α параметри боюнча $[\delta,+\infty)$ аралыгында бир калыпта жыйналат жана $\cos\alpha x, \sin\alpha x$ функциялары чектелген баштапкы функцияларга ээ, ал эми $\frac{1}{1+x^2}$ жана $\frac{x}{1+x^2}$ функциялар $x \to +\infty$ нөлгө умтулушат, бирок $x \geqslant 1$ маанисинде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leqslant 0, \ \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leqslant 0.$$

Эми $J_1(\alpha)$ дифференцирлеп,

$$\frac{dJ_1(\alpha)}{d\alpha} = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx = -J_2(\alpha) \tag{30}$$

барабардыгын алабыз. Бул дифференцирлөө закондуу, анткени $\alpha \in [\delta,+\infty)$ маанисинде $J_2(\alpha)$ интегралы бир калыпта жыйналат. Параметрди $\alpha \geqslant \delta > 0$ деп эсептеп, $J_2(\alpha)$ интегралынын туундусун табалы.

Ал үчүн

$$J_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(1 + x^2)} \right) \sin \alpha x dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1 + x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1 + x^2)} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1 + x^2)} dx.$$

11-теореманы колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{dJ_2(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx = -J_1(\alpha), \ \alpha \in [\delta, +\infty). \tag{31}$$

Ушул (30) жана (31) формулалардан

$$J_1'(\alpha) = -J_2'(\alpha), \ J_2'(\alpha) = -J_1'(\alpha), \ J_1''(\alpha) - J_1(\alpha) = 0 \tag{32}$$

келип чыгат.

Акыркы дифференциалдык теңдемени чыгарабыз:

$$J_1(\alpha) = c_1 e^{-\alpha} + c_2 e^{\alpha}, \ c_1, c_2 - const. \tag{33}$$

Бул (33) барабардыктагы $c_2 = 0$ экендигин көрсөтөлү. Себеби

$$|J_1(\alpha)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\cos \alpha x|}{1 + x^2} dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$$

болгондуктан $[\delta, +\infty)$ аралыгында $J_1(\alpha)$ чектелген функция болот. Ал эми e^{α} функциясы ошол эле $[\delta, +\infty)$ аралыгында чектелбеген функция, ошондуктан (33) формулага $c_2 = 0$ деп эсептөө керек.

Ошентип, $\alpha \in [\delta, +\infty)$ аралыгында

$$J_1(\alpha) = c_1 e^{-\alpha}, \quad J_2(\alpha) = -\breve{J}_1'(\alpha) = c_1 e^{-\alpha}. \tag{34}$$

Мында δ — каалаган сан болгондуктан, (34) формуладан төмөнкү алынат:

$$J_1(\alpha) = c_1 e^{-\alpha} = J_2(\alpha), \ \alpha > 0. \tag{35}$$

Эгерде Лапластын $J_1(\alpha)$ интегралы $(-\infty,+\infty)$ аралыгында жуп экендигин, ал эми $J_2(\alpha)$ интегралы $(-\infty,+\infty)$ де так функция экендигин эске алсак, анда (35) формуланы

$$J_1(\alpha) = c_1 e^{-|\alpha|}, \ J_2(\alpha) = c_1 sign\alpha e^{-|\alpha|} \tag{36}$$

түрүндө жазсак болот. Эми c_1 чоңдугун аныктоо үчүн $J_1(\alpha)$ интегралынын α параметри боюнча $(-\infty,+\infty)$ аралыгында бир калыпта жыйналышын колдонобуз. Анткени $J_1(\alpha)$ функциясы $\alpha = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз.

Анда

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = J_1(0) = \lim_{\alpha\to+0} J_1(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} c_1 e^{-\alpha} = c_1.$$

Демек, (36) формула

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \ \int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} sign\alpha e^{-|\alpha|} \tag{37}$$

түрүндө жазылат.

§ 3. ЭЙЛЕРДИН ИНТЕГРАЛДАРЫ

1. Эйлердин бета функциясы

Эки параметрден көз каранды болгон жана Эйлердин бета функциясы деп аталуучу

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \quad \alpha,\beta\in R \tag{1}$$

интегралын карайбыз. Бул интеграл эки өзгөчө $x=0$, $x=1$ чекитке ээ.

Касиеттерине токтололу.

1^0. **Аныктоо областы.** Алдыңкы (1) интеграл төмөнкү пределинде $(x=0)$ жыйналыш үчүн $\alpha>0$ шарты аткарылышы зарыл жана жетиштүү. Ошондой эле жогорку $(x=1)$ пределинде жыйналыш үчүн $\beta>0$ болушу зарыл.

Ошентип, $B(\alpha,\beta)$ функциясы бир мезгилде $\alpha>0$ жана $\beta>0$ маанилеринде аныкталат.

2^0. **Симметриялуулугу.** Бета функциясы үчүн

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha) \tag{2}$$

барабардыгы орун алат. Муну далилдөө үчүн (1) интегралга $x=1-t$ алмаштыруусун колдонуу жетиштүү.

3^0. **Кичирейтүү формуласы.** Эгерде $\alpha>1$ болсо, анда аны кичирейтүү үчүн

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta) \tag{3}$$

формуласын колдонобуз.

○ Чындыгында эле $\alpha>1$ жана $\beta>0$ болсо, анда (1) интегралга бөлүктөп интегралдоо формуласы жана теңдеш өзгөртүүлөрдү колдонуп,

$$B(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1+\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx=$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\beta} \int\limits_0^1 x^{\alpha-2}\Big((1 - x)^{\beta-1} - (1 - x)^{\beta-1} x\Big)dx =$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\beta} B(\alpha - 1,\beta) - \frac{\alpha - 1}{\beta} B(\alpha,\beta)$$

барабардыгын алабыз. Ал эми мындан окшошторун жыйнап, жөнөкөйлөтсөк, (3) формула келет. ●

Эгерде $\beta > 1$ болсо, анда (2) формуланын негизинде

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha,\beta - 1) \tag{3'}$$

жаза алабыз.

Бета функциясынын аныкталышынан

$$B(\alpha,1) = \frac{1}{\alpha}$$

болору көрүнүп турат, ошондуктан $n \in \boldsymbol{N}$ үчүн

$$B(\alpha, n) = \frac{n - 1}{\alpha + n - 1} \cdot \frac{n - 2}{\alpha + n - 2} \cdot \ldots \cdot \frac{n - (n - 1)}{\alpha + n - (n - 1)} B(\alpha,1) =$$

$$= \frac{(n - 1)!}{\alpha(\alpha + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha + n + 1)}. \tag{4}$$

Айрым учурда, $m,\ n \in \boldsymbol{N}$ үчүн

$$B(m, n) = \frac{(m - 1)!(n - 1)!}{(m + n - 1)!} \tag{5}$$

формуласы орун алат.

4^0. Бета функциясынын башкача туюнтулушу. Кээ бир учурларда бета функциясы үчүн

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1 + y)^{\alpha+\beta}} dy \tag{6}$$

түрүндө туюнтулушу өтө ыңгайлуу.

○ Чындыгында эле (1) интегралга $x = \frac{y}{1+y}$ алмаштыруусун колдонсок, мында y жаңы өзгөрмө чоңдук $0 \leqslant y < +\infty$, анда (6) келип чыгат. ●

Ушул формулага $\beta = 1 - \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$ деп карасак, анда

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)} dy = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{7}$$

толуктоо формуласына ээ болобуз, анткени α жана $1-\alpha$ аргументтер бири-бирин толуктайт.

Айрым учурда

$$\alpha = 1 - \alpha = \frac{1}{2}$$

болсо, анда

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

2. Эйлердин гамма функциясы

Эйлердин гамма функциясы деп аталуучу

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \tag{8}$$

интегралын карайлы. Бул интеграл эки $x = 0, x = +\infty$ өзгөчө чекитке ээ.

Касиеттерине токтололу.

1^0. **Аныктоо областы.** Алдыңкы (8) формуладан көрүнүп тургандай, гамма функциясы төмөнкү $(x = 0)$ пределинде $\alpha > 0$ болсо эле жыйналат, ал эми чексиздикте, e^{-x} көбөйтүндүсүнүн тез кемишинин негизинде, ар кандай $\alpha \in R$ маанисинде жыйналат.

Ошентип, гамма функциясынын аныкталуу областы $\alpha > 0$.

2^0. Жылмалуулугу жана туундулардын формуласы. Гамма функциясы чексиз дифференцирленүүчү функция

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x} dx. \qquad (9)$$

○ Адегенде, ар кандай туруктуу $n \in N$ мааниси үчүн (8) интегралдын ар бир $[a, b] \subset (0, +\infty)$ аралыгында α параметри боюнча бир калыпта жыйнала тургандыгын көрсөтөлү.

Эгерде $0 < a \leqslant \alpha$ болсо, анда (себеби $x^{a/2} \ln^n x \to 0, x \to +0$) $c_n > 0$ саны аныкталып,

$$\left| x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x} \right| < x^{\frac{a}{2}-1}$$

барабарсыздыгы $0 < x \leqslant c_n$ үчүн орун алат. Демек, Вейерштрасстын белгиси боюнча

$$\int_0^{c_n} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x} dx$$

интегралы α боюнча $[a, +\infty)$ аралыгында бир калыпта жыйналат.

Эгерде $\alpha \leqslant b < +\infty$ болсо, анда $x \geqslant 1$ маанисинде

$$\left| x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x} \right| \leqslant x^{b-1} \left| \ln^n x \right| \cdot e^{-x}$$

барабарсыздыгы аткарылып, жогоркудай эле $(0, b]$ аралыгында

$$\int_{c_n}^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x} dx$$

интегралы α боюнча бир калыпта жыйналат.

Ушул жыйынтыктарды бириктирип, биз (8) интегралдын ар кандай $[a, b] \subset (0, +\infty)$ аралыгында бир калыпта жыйналышына ынанабыз.

Бирок, ушул шарттарда (8) интегралдын алдын дифференцирлөө закондуу. Демек, ар кандай $[a,b]$ аралыкта, ошондой эле бардык $\alpha>0$ аралыктарда $\Gamma(\alpha)$ функциясы чексиз дифференцирленүүчү болот жана (9) формула орун алат. ●

3^0. Кичирейтүү формуласы. Гамма функциясы үчүн

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{10}$$

кичирейтүү (төмөндөтүү) формуласы маанилүү.

○ Алдыңкы (8) интегралды, $\alpha>0$ маанисинде, бөлүктөп интегралдоо формуласын колдонуп, (10) формуланы далилдейбиз:

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=$$

$$=\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Ал эми

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

экендигин эске алсак, анда $n\in\boldsymbol{N}$ үчүн

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{11}$$

барабардыгын алабыз. Бул $n!$ функциясы $n\in\boldsymbol{N}$ үчүн аныкталган. ●

4^0. Эйлер-Гаусстун формуласы. Төмөнкү

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)} \tag{12}$$

барабардыкты далилдейли.

○ Эгерде (8) интегралга $x=\ln\frac{1}{z}$ алмаштыруусун колдонсок, анда

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{\alpha-1} dz$$

интегралын алабыз. Ал эми

$$\ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$$

барабардыгы орун аларын далилдөөгө болот, бирок $n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$ туюнтмасы n өсүшү менен өзүнүн пределине өсүү жолу менен жетише алат. Анда

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1} dz,$$

же буга $z = y^n$ алмаштыруусун колдонсок,

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \int_0^1 y^{(n-1)} (1 - y)^{\alpha-1} dy$$

интегралына ээ болобуз. Ал эми (4) формуланын негизинде

$$\int_0^1 y^{(n-1)} (1 - y)^{\alpha-1} dy = B(n, \alpha) = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}.$$

Мына ошентип, акырында биз (12) формуланы далилдеген болобуз.

5^0. Толуктоо формуласы. Бета функциясы сыяктуу эле гамма функциясы үчүн

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \quad (0 < \alpha < 1) \tag{13}$$

толуктоо формуласын көрсөтүүгө болот.

○ Эйлер-Гаусстун (12) формуласын колдонуп жана жөнөкөй теңдеш өзгөртүүлөрдөн төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}\cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)(n-\alpha)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.$$

Ошентип, $0 < \alpha < 1$ үчүн

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{1}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}} \tag{14}$$

формуласын алабыз.

Ошондой эле

$$\sin\alpha\pi = \alpha\pi\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \tag{15}$$

ажыралышты эске түшүрсөк жана ушул (14), (15) формулалардан (13) формуланын келип чыгышына ынанабыз. ●

Айрым учурда, $\alpha = \frac{1}{2}$ десек, (13) формуладан

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{16}$$

формуласын алабыз. Мында

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz = \sqrt{\pi}$$

же $z = x^2$ алмаштыруусун колдонсок, анда бизге белгилүү болгон Эйлер-Пуассондун (§2. 2-мисал)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

интегралын алабыз.

6^0. Гамма жана бета функцияларынын байланышы. Биз жогоруда алган (5) жана (11) формулалар бета жана гамма функцияларынын байланыштары бар экендигине ынандырат. Бул байланыш

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \tag{17}$$

формуласы аркылуу берилет.

○ Далилдөө үчүн (8) интегралга $x = ty(t > 0)$ алмаштыруусун колдонуп,

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-ty} dy \tag{18}$$

түргө келтиребиз. Эми бир эле мезгилде α ны $\alpha + \beta$ жана t ны $t + 1$ ге алмаштырып,

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{(1 + t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy$$

барабардыгын алабыз жана бул барабардыктын эки жагын $t^{\alpha-1}$ ге көбөйтүп, t боюнча 0 дөн $+\infty$ ге чейин интегралдайбыз:

$$\Gamma(\alpha + \beta) \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1 + t)^{\alpha+\beta}} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} dt \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Сол жагындагы интеграл (6) боюнча $B(\alpha, \beta)$ функциясын берет, ал эми оң жагындагы интегралдын интегралдоо багытын өзгөртөбүз (мындай кылууга болот, анткени ал интегралдын алдындагы функциялар $y \geqslant 0$ жана $t \geqslant 0$ маанилеринде үзгүлтүксүз жана оң мааниге ээ). Жыйынтыгында (8) жана (18) эске алсак, анда

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-ty}dt=\int_0^{+\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-y}\frac{\Gamma(\alpha)}{y^{\alpha}}dy=$$

$$=\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}y^{\beta-1}e^{-y}dy=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta).$$

Демек, мындан (17) формула келип чыгат. ●

Мисалдар: 1. $\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi$ интегралын эсептегиле.

Δ Бул интегралды эсептөө үчүн $\sin^2\varphi=x$ алмаштыруусун колдонобуз. Анда

$$\cos^2\varphi=1-x,\quad \sin\varphi=x^{-\frac{1}{2}},\quad \cos\varphi=(1-x)^{-\frac{1}{2}},$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=dx$$

жана ошондуктан

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi=\int_0^{\pi/2}\sin^{a-2}\varphi\cos^{b-2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{a-2}{2}}(1-x)^{\frac{b-2}{2}}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Айрым учурда, $b=1$ болсо, анда

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Эгерде, берилген интегралга $a=1+c$, $b=1-c$, $|c|<1$ десек, анда

$$\int_0^{\pi/2} tg^c\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}. \ \blacktriangle$$

2. **Эйлердин интегралдарын колдонуп,**

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

өздүк эмес интегралын эсептегиле.

Δ Берилген интегралды Эйлердин бета функциясына келтирүү үчүн интегралдын 0 дөн $+\infty$ пределин 0 дөн 1 пределине келтирүүчү алмаштырууну алуу зарыл. Ушул максатта

$$1+x^3=\frac{1}{y} \quad \text{же} \quad x=\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)$$

алмаштыруусун алабыз.

Демек, анда

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\int_1^0 y\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{3}\int_1^0 y^{\frac{1}{3}}(1-y)^{-\frac{2}{3}}dy =$$

$$= \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \ \blacktriangle$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$ **интегралынын жашоо областын аныктап, Эйлердин интегралына келтиргиле.**

Δ Алдыңкы мисалдагыдай эле, бул интегралга

$$1+x=\frac{1}{t},\quad x=\frac{1-t}{t},\quad dx=-\frac{dt}{t^2}$$

алмаштыруусун колдонсок, анда

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx=-\int_1^0\left(\frac{1-t}{t}\right)^{m-1}t^n\,\frac{dt}{t^2}=\int_0^1 t^{n-m-1}(1-t)^{m-1}dt=$$

$$=B(n-m,m).$$

Бул интеграл, эгерде $n-m>0$ жана $m>0$, б.а. $n>m>0$ маанисинде гана аныкталат. $\blacktriangle$

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^{\pi/2}\operatorname{arctg}(\lambda\sin x)dx$;

Ж о о б у. $\left(\pi/2\right)\ln\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)$.

б) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$;

Ж о о б у. $\ln(\beta/\alpha)$.

в) $\int_0^1\frac{x^\lambda-x^\mu}{\ln x}dx,\qquad \lambda>0,\mu>0$;

Ж о о б у. $\ln(\lambda+1)/(\mu+1)$.

г) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx,\ \alpha>0,\beta>0$;

Ж о о б у. $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$.

2. $\Phi(\alpha)$ функциясынын көрсөтүлгөн аралыкта үзгүлтүксүздүгүн далилдегиле:

а) $\Phi(\alpha)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+\alpha},\qquad (0<\alpha<1)$;

б) $\Phi(\alpha)=\int_0^1\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}dx,\qquad (0<\alpha<\alpha_0)$;

в) $\Phi(\alpha)=\int_0^1\ln(x^2+\alpha^2)dx,\qquad (-\infty<\alpha<0)$.

3. Өздүк эмес интегралдардын көрсөтүлгөн аралыкта бир калыпта жыйналышын далилдегиле:

а) $J(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + \alpha^2} dx, \quad (\alpha \neq 0), \quad -\infty < x < \infty;$

б) $J(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad 0 \leqslant \alpha < \infty.$

4. Эсептегиле:

а) $\Gamma(3,2);$ г) $\int\limits_0^1 x^3\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^2 dx;$ Ж о о б у. $\frac{1}{364}$.

б) $\Gamma(5/4) \cdot \Gamma(-5/4);$ ж) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}};$ Ж о о б у. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^8 x dx;$ Ж о о б у. $5\pi/2^{12}$.

XI глава

ФУРЬЕНИН КАТАРЛАРЫ ЖАНА ИНТЕГРАЛЫ

I. ФУРЬЕНИН КАТАРЛАРЫ

§ 1. ФУНКЦИЯЛАРДЫН СИСТЕМАСЫНЫН ОРТОГОНАЛДУУЛУГУ

Эгерде $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функциялардын $\{\varphi_n(x)\} = \varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x),\dots$ системасы берилип,

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad n,\ m \in \boldsymbol{N} \text{ жана } n \neq m \text{ үчүн}, \tag{1}$$

барабардыгы аткарылса, анда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялардын системасын $[a,b]$ аралыгында *ортогоналдуу система* деп айтабыз.

Эгерде мындан тышкары,

$$\int^b \varphi_n^2(x) = 1, \quad x \in \boldsymbol{N} \text{ үчүн} \tag{2}$$

барабардыгы аткарылса, анда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялардын системасын $[a,b]$ аралыгында *ортонормалдуу система* деп айтабыз.

Мисалы, тригонометриялык функциялардын системасы

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \dots\ ,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\dots \tag{3}$$

$[-l,\ l]$ аралыгында ортогоналдуу. Айрым учурда $[-\pi,\pi]$ десек, жөнөкөй

$$\frac{1}{2},\cos x,\ \sin x,\ \dots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \dots \tag{3'}$$

тригонометриялык системаны алабыз жана ал $[-\pi, \pi]$ аралыгында ортогоналдуу, анткени $n \neq m$ болсо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0.$$

Чындыгында эле тригонометриядан бизге белгилүү болгон:

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x],$$

$$\cos nx \sin mx = \frac{1}{2}[\sin(n+m)x - \sin(n-m)x],$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}[-\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]$$

формулаларды пайдалансак, (4)гү ар бир интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx$ жана $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx$ түрүндөгү интегралга келтирилет жана

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

мында $k \neq 0$. Бул болсо (3′) системасынын $[-\pi, \pi]$ аралыгында ортогоналдуу экендигин билгизет.

Ал эми

$$2\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = l,\quad n\in N \tag{5}$$

болгондуктан, (3) системанын бардык мүчөлөрүн $\sqrt{l}$ ге (биринчи мүчөсүн $\sqrt{\frac{l}{2}}$ ге) бөлүп, $[-l, l]$ аралыгында ортонормалдуу тригонометриялык системаны

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots, \tag{6}$$

ал эми $l = \pi$ болгондо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \tag{6′}$$

$[-\pi, \pi]$ аралыгында ортонормалдуу системасын алабыз.

§ 2. ОРТОГОНАЛДУУ СИСТЕМА БОЮНЧА ФУРЬЕНИН КАТАРЫ

Эми $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүз болсо, ал эми $\{\varphi_k(x)\}$ — $[a, b]$ аралыгында ортогоналдуу үзгүлтүксүз функциялардын системасы болуп, бирок $\varphi_k(x)$ функцияларынын эч бири $[a, b]$ аралыгында нөлгө айланышпасын дейли.

Бул учурда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында ортогоналдуу функциялардын $\{\varphi_k(x)\}$ системасы боюнча жыйналуучу катарга ажырайт, эгерде $\{a_k\}$ сан удаалаштыгы аныкталып,

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ функционалдык катары жыйналса жана анын суммасы $f(x)$ ке барабар болсо, б.а.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x), \ x \in [a, b]. \tag{7}$$

1-лемма. *Эгерде (7) функционалдык катар $[a, b]$ аралыгында бир калыпта жыйналса, анда бул катардын коэффициенттери үчүн*

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}, \quad n \in \boldsymbol{N} \tag{8}$$

формуласы орун алат.

○ Шарт боюнча $\varphi_n(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүз, анда ал ошол аралыкта чектелген (Вейерштрасстын теоремасы). Бир калыпта жыйналуучу катарды, чектелген функцияга көбөйтүп, бир калыпта жыйналуучу функционалдык катарды алабыз (бул бир калыпта жыйналуучу функционалдык катардын аныктамасы боюнча). Ошондуктан, (7) катарды $\varphi_n(x)$ функциясына көбөйтүп,

$$f(x)\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x), \quad n \in \boldsymbol{N} \tag{9}$$

катарын алабыз жана бул катардын оң жагы $[a, b]$ аралыгында бир калыпта жыйналат.

Бир калыпта жыйналуучу катарларды мүчөлөп интегралдоо теоремасына жана $\varphi_k(x)$ функциясынын $[a, b]$ аралыгындагы ортогоналдуулугуна таянып,

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\right)\varphi_n(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx \qquad (10)$$

барабардыгын алабыз. Мында $\varphi_n(x)$ функциясы $[a,b]$ аралыгында нөлгө барабар эмес жана үзгүлтүксүз, анда $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0$.

Ошондуктан, (10) барабардыктан (8) келип чыгат. ●

Ошентип, a_n — санын Фурьенин коэффициенти деп, (7) катарды $f(x)$ функциясынын, $[a,b]$ аралыгында ортогоналдуу функциялардын $\{\varphi_k(x)\}$ системасы боюнча, Фурьенин катары деп атайбыз.

Ал эми $f(x)$ функциясынын $[-l,\ l]$ аралыгындагы тригонометриялык система боюнча Фурьенин катарын

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (11)$$

түрүндө жазабыз жана аны $f(x)$ функциясы үчүн $[-l,\ l]$ аралыгындагы Фурьенин тригонометриялык катары деп атайбыз.

Эгерде (8) формулага $\sin\frac{n\pi x}{l}$ жана $\cos\frac{n\pi x}{l}$ тригонометриялык функцияларды коюп, (5) формуланы пайдалансак, анда a_k жана b_k коэффициенттерди аныктайбыз:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n \in N \qquad (12)$$

айрым учурда $l = \pi$ болсо,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{13}$$

§ 3. АБСОЛЮТТУУ ИНТЕГРАЛДАНУУЧУ ФУНКЦИЯЛАР ҮЧҮН ФУРЬЕНИН КАТАРЫ

Эгерде $\varphi_k(x)$ функциялары үзгүлтүксүз жана $[a,b]$ аралыгында нөлгө айланышпаса, анда ар кандай $[a,b]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин коэффициенттерин (8) формула аркылуу эсептөөгө болот.

Чындыгында эле, $\int_a^b |f(x)|dx$ өздүк эмес интегралы жыйналса, анда

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leqslant k_n|f(x)|, \qquad k_n = \sup_{x\in[a,b]}|\varphi_n(x)|.$$

Салыштыруу белгиси боюнча $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$ интегралы абсолюттуу жыйналат. Ошондуктан, Фурьенин бардык коэффициенттери (8) формуланын жардамы менен эсептелет.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ катарын ортогоналдуу функциялардын $\{\varphi_n(x)\}$ системасы боюнча $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары деп атайбыз, мында a_n болсо $[a,b]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин коэффициенти. Бул катар, мүмкүн таралуучу болуп калса, анда

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{14}$$

түрүндө жазабыз. Айрым учурда, (3) тригонометриялык система үчүн (14) формула

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

түрүн алат.

§ 4. РИМАНДЫН ЛЕММАСЫ

1-лемма (Римандын леммасы). *Эгерде $f(x)$ функциясы чектүү же чексиз (a, b) интервалында абсолюттуу интегралдануучу болсо, анда*

$$\lim_{\omega\to 0}\int_a^b f(x)\sin\omega x dx = \lim_{\omega\to 0}\int_a^b f(x)\cos\omega x dx = 0 \tag{1}$$

формула орун алат.

○ а) $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралыгында интегралдануучу (Риман боюнча) функция болсун. Интегралдануучулуктун критерийи боюнча, ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $T = \left\{x_i, i = \overline{0,n}\right\}$ майда бөлүүсү аныкталып, $[a,b]$ аралыгын Дарбунун жогорку жана төмөнкү суммаларынын айырмасы $\frac{\varepsilon}{2}$ ден кичине болгудай кылып бөлөбүз, б.а.

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

мында

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Анда ар кандай $i=\overline{1,n}$ жана ар кандай $x\in[x_{i-1},x_i]$ үчүн $0\leqslant f(x)-m_i\leqslant M_i-m_i$ барабарсыздыгы аткарылат жана

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\omega x dx\right|=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\omega x dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-m_i\right)\sin\omega x dx+\sum_{i=1}^n m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\omega x dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x)-m_i\right|\cdot\left|\sin\omega x\right|dx+\sum_{i=1}^n\frac{\left|m_i\right|}{\left|\omega\right|}\left|\cos\omega x_i-\cos\omega x_{i-1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i+\frac{2}{|\omega|}\sum_{i=1}^n|m_i|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{c_0}{|\omega|},$$

мында

$$c_0=2n\cdot\sup_{x\in[a,b]}f(x).$$

Эми турактуу n үчүн $\omega_0>0$ саны табылып, $|\omega|>\omega_0$ болгондо $\frac{c_0}{|\omega|}<\frac{\varepsilon}{2}$ аткарылат. Ошондуктан $|\omega|>\omega_0$ болгондо

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\omega x dx\right|<\varepsilon,$$

б.а.

$$\lim_{\omega\to 0}\int_a^b f(x)\sin\omega x dx=0$$

барабардыгы орун алат.

б) Бул учурда $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында абсолюттуу интегралдануучу функция болсун жана $\int_{b'}^{b} |f(x)| dx$ интегралы бир гана жалгыз b өзгөчө чекитке ээ болсун (биз өздүк эмес интегралды чектүү гана өзгөчө чекитке ээ болгон учурун карайбыз). Анда $\forall \varepsilon > 0 \exists b' < b$ табылып, $[a, b']$ аралыгында $f(x)$ функциясы интегралдануучу (Риман боюнча) болот, ал эми өздүк эмес интеграл

$$\int_{b'}^{b} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ал эми Риман боюнча интегралдануучу функция үчүн лемма а) пунктунда далилденди. Анда $\omega_0 > 0$ саны аныкталып, бардык $\omega > \omega_0$ болгондо

$$\left| \int_{a}^{b'} f(x) \sin \omega x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ошондуктан, $|\omega| > \omega_0$ үчүн

$$\left| \int_{a}^{b} f(x) \sin \omega x dx \right| = \left| \int_{a}^{b'} f(x) \sin \omega x dx + \int_{b'}^{b} f(x) \sin \omega x dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{a}^{b'} f(x) \sin \omega x dx \right| + \int_{b'}^{b} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Демек, $\omega \to \infty$ да $\int_{a}^{b} f(x) \sin \omega x dx \to 0$. Ушул сыяктуу эле

$$\lim_{\omega \to 0} \int_{a}^{b} f(x) \cos \omega x dx = 0$$

барабардыгы далилденет. ●

Натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы $[-l, l]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу болсо, анда (12) жана (13) формулалар боюнча аныкталуучу Фурьенин коэффициенттери $n \to \infty$ да нөлгө умтулат (§2ни кара).

§ 5. ЖУП ЖАНА ТАК ФУНКЦИЯЛАР ҮЧҮН ФУРЬЕНИН КАТАРЫ

Биз $[-l, l]$ аралыгында жуп жана так функциялардын аныктамаларына таянып,

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^l f(x)dx, & \text{эгерде } f(x) \text{ жуп функция болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } f(x) \text{ так функция болсо,} \end{cases} \quad (1)$$

барабардыгын алабыз. Ал эми

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l}$$

функциялар жуп жана

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{k\pi x}{l}$$

функциялар так.

Эми $f(x)$ функциясы $[-l, l]$ аралыгында интегралдануучу болсун: эгерде $f(x)$ функциясы жуп болсо, анда ал функция үчүн Фурьенин катары

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}\ , \quad (2)$$

ал эми $f(x)$ функциясы так болсо, анда ал функция үчүн Фурьенин катары

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3}$$

түрүндө болушат.

Чындыгында эле, $f(x)$ жуп болсо, анда $f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$ дагы жуп функция, ал эми $f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}$ — так функция болот, ошондуктан

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx\ ,\quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{4}$$

Эгерде $f(x)$ так функция болсо, анда $f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{2}$ так, ал эми $f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}$ жуп функция болот, ошондуктан

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0\ ,\quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{5}$$

Айрым учур $l = \pi$ үчүн (2), (3), (4), (5) формулаларды оңой эле жазууга болот.

§ 6. ФУРЬЕНИН КАТАРЫНЫН АЙРЫМ СУММАЛАРЫ. ДИРИХЛЕНИН ФОРМУЛАСЫ

Биз $f(x)$ функциясын $[-l,\ l]$ аралыгында $2l$ — мезгилдүү абсолюттуу интегралдануучу болсун дейли. Анда ал функция үчүн Фурьенин тригонометриялык катары §1, (11) — формула түрүндө жазылат. Ал катардын айрым суммасын карайлы:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{1}$$

Мында $S_n(x)$ функциясы чексиз дифференцирленүүчү жана $2l$ мезгилдүү болоору бышык.

Эми $S_n(x)$ үчүн формуланы (Дирихленин формуласын) табалы. Ал үчүн $u \neq 2k\pi,\ \ k \in Z$ деп,

$$D_n(u) \equiv \frac{1}{2} + \cos u + \ \ldots\ + \cos nu = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{2}$$

бирдейлигин далилдейли.

○ Далилдөө үчүн бирдейликтин эки жагын тең $2\sin\frac{u}{2}$ ге көбөйтүү жетиштүү:

$$2D_n(u)\sin\frac{u}{2} \equiv \sin\frac{u}{2} + 2\cos u\sin\frac{u}{2} + \ \ldots\ + 2\cos nu\cdot\sin\frac{u}{2} =$$

$$= \sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} + \ \ldots\ + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u -$$

$$- \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u.$$

Мындагы, (2) формула менен аныкталган $D_n(u)$ *функциясын Дирихленин ядросу деп атайбыз.*

1-лемма. *Дирихленин ядросу чексиз дифференцирленүүчү жуп мезгилдүү функция жана*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1 . \tag{3}$$

Дирихленин ядросунун жуптугу, 2π — мезгилдүүлүгү жана чексиз дифференцирленүүчүлүгү (2) формуладан көрүнүп турат, анткени $\cos ku$ ошол эле касиеттерге ээ болот. Ал эми (3) формуладагы эле (2) формула менен аныкталган Дирихленин ядросунун аныктамасынан келет:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos u + \ \dots \ + \cos nu\right)du =$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ku du = 1.$$

Фурьенин айрым суммалары үчүн Дирихленин формуласын чыгарабыз. Ал үчүн (1) суммага § 2 деги (12) Фурьенин коэффициенттерин коюп, Дирихленин ядросу үчүн (2) формуланы пайдаланабыз:

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi x}{l}dt + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\right] = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi t}{l} + \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right]dt + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{l}(x-t)\right]dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x} f(t-u)D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du. \tag{4}$$

2-лемма. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[-l,\ l]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу жана $2l$ мезгилдүү болсо, анда кандай гана a анык саны болбосун*

$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx \qquad (5)$$

барабардыгы орун алат.

Ушул лемманын жыйынтыгын (4) интегралга колдонобуз, анткени интеграл астындагы функция $2l$ — мезгилдүү, анда

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x-u)D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du. \qquad (6)$$

Айрым суммалар үчүн ушул (6) туюнтманы Дирихленин формуласы деп атайбыз. Аны дагы өзгөртүп,

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} \left[f(x+u) + f(x-u)\right]D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du \qquad (7)$$

түрүнө келтирүүгө болот, эгерде интегралдоо аралыгын эки симметриялык аралыктарга бөлүп, экинчи интегралга $u = -v$ алмаштыруусун жана Дирихленин ядросунун жуптугун пайдалансак.

Айрым учурда, $l = \pi$ болсо, (6) жана (7) жөнөкөй түргө келет:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+u) + f(x-u)\right]D_n(u)du. \qquad (8)$$

§ 7. ФУРЬЕНИН КАТАРЫНЫН ЧЕКИТТЕ ЖЫЙНАЛЫШЫ

1. Локализациялоо теоремасы

Фурьенин катарынын x_0 чекитинде жыйналышы, анын Дирихленин (8) формуласы боюнча аныкталган айрым $S_n(x_0)$ суммасынын жыйналышын изилдөөгө алып келет. Мындан ары $l=\pi$ учурун гана карайбыз. Бул жалпы учурдан четтөө эмес, анткени 2π мезгилден $2l$ мезгилдүүгө жөнөкөй алмаштыруунун жардамы менен өтсөк болот.

1-теорема (локализациялоо принциби). *$f(x)$ функциясы 2π — мезгилдүү жана $[-\pi,\ \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу функция болсун. Анда Фурьенин катарынын $x_0 \in R$ чекитинде $f(x)$ функциясына жыйналышы жана x_0 чекитиндеги Фурьенин катарынын суммасы, каалагандай кичине $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, интервалындагы $f(x)$ функциясынын өзгөрүшүнөн көз каранды.*

○ Алдыңкы, §6 дагы (8) формуланы колдонуп, Фурьенин катарынын айрым суммасын

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\dfrac{u}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du \qquad (1)$$

түрүндө жазалы. Мында $f(x_0+u)+f(x_0-u)$ функциясы $[-\pi,\ \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу болгондуктан, ал эми каалаган $\delta>0$ үчүн жана бардык $u\in[\delta,\ \pi]$ үчүн

$$\left|\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\dfrac{u}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}\left|f(x_0+u)+f(x_0-u)\right|$$

барабарсыздыгы аткарылгандыктан, салыштыруу белгиси боюнча

$$\Phi(u)=\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

функциясы $[\delta, \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу болот. Римандын леммасы боюнча

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu=0.$$

Анда (1) формуладан

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu\right]=0 \qquad (2)$$

барабардыгын алабыз. Бул (2) формуладан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)$ пределинин аныкталышы жана чондугу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu$$

пределинин аныкталышынан жана чондугунан көз каранды, б.а. $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалындагы функциянын маанилеринен көз каранды.

Эскертүү. $f(x)=\frac{1}{2}$ функциясы үчүн (2) формула

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

түрдө жазылат (ар кандай сан $\delta>0$ саны үчүн).

2. Гельдердин шарты

Эгерде x_0 чекитинде чектүү бир жактуу $f(x_0 \pm 0)$ пределдер жана $\delta > 0$, $\alpha \in [0,1]$ жана c_0 сандары аныкталса, бардык $u \in (0,\ \delta)$ үчүн

$$|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)| \leqslant c_0 u^\alpha; \ |f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)| \leqslant c_0 u^\alpha \qquad (4)$$

барабарсыздыктары аткарылса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде Гельдердин шартын аткарат деп айтышат, ал эми α саны Гельдердин көрсөткүчү.

Эгерде $|f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)|$ болсо, Гельдердин (4) шартын канааттандырган $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде биринчи түрдөгү үзүлүшкө ээ болот. Ушуларды эске алып, бир жактуу туундунун аныктамасын кеңейте алабыз:

$$\overset{1}{\underset{+}{f}}(x_0) = \lim_{u \to +0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u},$$

$$\overset{1}{\underset{-}{f}}(x_0) = \lim_{u \to -0} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u}.$$

1-лемма. *Эгерде x_0 чекитинде $f(x)$ функциясы чектүү бир жактуу $\overset{1}{\underset{-}{f}}(x_0)$ жана $\overset{1}{\underset{+}{f}}(x_0)$ туундуларга ээ болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде Гельдердин шартын $\alpha = 1$ көрсөткүчү менен канааттандырат.*

○ $\varphi(u) = \dfrac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}$, $\psi(u) = \dfrac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u}$

функциялары $u \to +0$ да чектүү пределге ээ жана ошондуктан $(0,\ \delta)$ интервалында чектелген, б.а. $c_0 > 0$ аныкталып,

$$\left|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\right| \leq c_0, \quad \left|\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u}\right| \leq c_0$$

барабарсыздыктары аткарылат. Ошондуктан, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде Гельдердин шартын $\alpha = 1$ көрсөткүчү менен канааттандырат.

Натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде туундуга ээ болсо, анда ал ушул чекитте Гельдердин шартын канааттандырат.

Тескери жыйынтык туура болбойт, себеби $|x|^\alpha$ функциясы $0 < \alpha < 1$ үчүн Гельдердин шартын канааттандырат, бирок $x = 0$ чекитинде дифференцирленбейт. ●

3. Фурьенин катарынын чекитте жыйналышы

2-теорема. 2π — *мезгилдүү $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу жана x_0 чекитинде Гельдердин шартын канааттандырсын. Анда $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары x_0 чекитинде жыйналат жана*

$$\frac{1}{2}\Big(f(x_0+0)+f(x_0-0)\Big)$$

суммасына ээ болот.

Эгерде x_0 чекитинде $f(x)$ функциясы дагы үзгүлтүксүз болсо, анда ушул чекитте Фурьенин катарынын суммасы $f(x_0)$ го барабар.

○ $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде Гельдердин шартын канааттандыргандыктан, $0 < u < \delta$ жана $\alpha > 0$ үчүн (4) барабарсыздык аткарылат.

Берилген $\delta > 0$ оң саны үчүн (2) жана (3) барабардыктарды жазалы.

(3) барабардыкты $f(x_0+0)+f(x_0-0)$ менен көбөйтүп, келип чыккан жыйынтыкты (2) барабардыктан кемитип,

$$\lim_{u\to+0}\left[S_n(x_0)-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}-\right.$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\times \tag{5}$$
$$\left.\times\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu\right]=0$$

барабардыгын алабыз.

Гельдердин (4) шартынан,

$$\Phi(u)=\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{6}$$

функциясынын $[0,\ \delta]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучулугу келип чыгат. Чындыгында эле, Гельдердин барабарсыздыгын колдонуп, (6) барабардык менен аныкталган $\Phi(u)$ функциясына

$$\Phi(u)\leqslant\frac{2c_0u^{\alpha}}{\frac{2}{\pi}u}=\pi c_0u^{\alpha-1},\quad \alpha\in(0,1) \tag{7}$$

барабарсыздыгы аткарылаарын алабыз.

Өздүк эмес интегралдар үчүн салыштыруу белгиси боюнча (7) барабарсыздыктан, $\Phi(u)$ функциясынын $[0,\ \delta]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучулугу келип чыгат. Ал эми Римандын леммасынан

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\Phi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu=0.$$

Демек, анда (5) формуладан

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

барабардыгы келип чыгат.

1-натыйжа. Эгерде 2π — мезгилдүү жана $[-\pi, \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде бир жактуу туундулардын экөөнө тең ээ болсо, анда анын Фурье катары x_0 чекитинде $\frac{1}{2}f(x_0+0)+\frac{1}{2}f(x_0-0)$ го жыйналат.

2-натыйжа. Эгерде 2π — мезгилдүү жана $[-\pi, \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде туундуга ээ болсо, анда анын Фурье катары ушул чекитте $f(x_0)$ го жыйналат.

3-натыйжа. Эгерде 2π — мезгилдүү жана $[-\pi, \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу, $f(x)$ функциясы $\pm\pi$ чекиттеринде Гельдердин шартын канааттандырса, анда мезгилдүүлүктүн негизинде $\pm\pi$ чекиттериндеги Фурьенин катарынын суммасы

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} \text{ го}$$

барабар болот.

§ 8. ФУНКЦИЯНЫ ФУРЬЕНИН КАТАРЫНА АЖЫРАТУУГА МИСАЛДАР

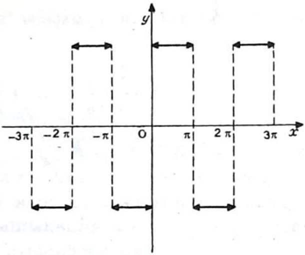
Мезгили 2π болгон функцияларды Фурьенин катарына ажыратууга мисалдарды келтирели:

1-мисал.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\pi), \\ -1, & x \in (-\pi,0), \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

функциясынын $[-\pi, \pi]$ аралыгында Фурьенин тригонометриялык катарына ажыратып, алынган катардын жыйналышын изилдегиле.

Δ Берилген $f(x)$ функциясын бардык чыныгы окко мезгилдүү улантып, (2-чийме) $\tilde{f}(x)$ функциясын алабыз. Ал эми $f(x)$ функциясы так болгондуктан



2-чийме

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k}(1-\cos k\pi),$$

$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}.$$

Ошондуктан,

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Мында $\tilde{f}(x)$ функциясы $x \neq k\pi$ үчүн аныкталгандыктан

$$\tilde{f}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z.$$

Бул $\tilde{f}(x)$ функциясы $x = k\pi$ үчүн аныкталбаган, анда Фурьенин катарынын суммасы нөлгө барабар. Ал эми $x = \frac{\pi}{2}$ болсо,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ \dots \ + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ \dots \ = \frac{\pi}{4}$$

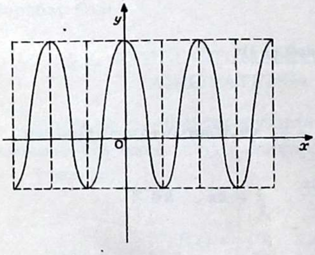
барабардыгын алабыз. ▲

2-мисал. $f(x) = \cos ax, \ -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ a \neq n \in Z$ **функциясын Фурьенин тригонометриялык катарына ажыраткыла жана алынган катардын жыйналышын изилдегиле.**

Δ $f(x)$ функциясын бардык чыныгы окко мезгилдүү улантып, үзгүлтүксүз жана 2π — мезгилдүү функцияга ээ болобуз. Алынган функция ар бир чекитте бир жактуу туундулардын экөөнө тең ээ болушат (3-чийме). Мындай функциялар үчүн Фурьенин катары каалаган чекитте функциянын ошол чекиттеги маанисине сөзсүз жыйналат. Фурьенин коэффициенттерин табалы. Берилген $f(x)$ функциясы жуп болгондуктан бардык $b_n = 0$, ал эми a_n коэффициентин

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(a-n)x + \cos(a+n)x]dx =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right],$$



3-чийме

мындан

$$\frac{\pi \cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)\cos nx,$$

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi. \ ▲ \qquad (1)$$

Эскертүү. Алынган (1) формулага $x = \pi$ жана $a\pi = z$ десек, анда $ctgz$ функциясы элементардык бөлчөктөргө ажыратылган эң бир сонун формуласын алабыз:

$$ctgz = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right), \tag{2}$$

мында $\pm n\pi$ чекиттер $\sin z$ функциясынын нөлү.

Эгерде (1) формулага $x=0$ жана $z = a\pi$ десек, анда биз $\operatorname{cosec} z$ функциясынын элементардык бөлчөктөргө ажыралышын алабыз:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right). \tag{3}$$

3-мисал. $f(x) = x\sin x$ функциясын $(-\pi,\ \pi)$ аралыгында Фурьенин катарына ажыраткыла.

Δ Берилген функция $f(-x) = f(x)$ жуп, анда бардык $b_n = 0$, ал эми

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\big[\sin(n+1)x -$$

$$- \sin(n-1)x\big]dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{x\cos(n-1)x}{n-1}\Bigg|_0^{\pi} +\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\Bigg|_0^{\pi}\right\} = -\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{n^2-1},$$

a_0 — коэффициентин ушул формула же

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x dx$$

формуласы аркылуу эсептесек, мааниси 2ге барабар болот. Бирок, a_1 коэффициентин $a_n(n=1)$ ден алууга болбойт. Аны төмөнкүдөй жазабыз:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x dx = -\frac{x\cos 2x}{2\pi}\Bigg|_0^{\pi} +$$

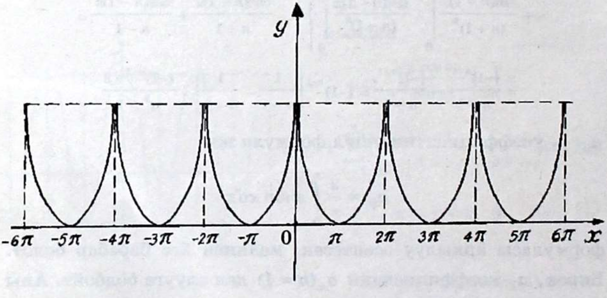
$$+\int_0^{\pi}\frac{\cos 2x}{2\pi}dx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{4\pi}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}.$$

Демек,

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n^2-1}\cos nx \text{ . } \blacktriangle$$

4-мисал. 2π — мезгилдүү жана $[-\pi,\ \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу $f(x) = -\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$, $x \neq 2k\pi$, $x \in Z$ функциясын Фурьенин катарына ажыратып, анын жыйналышын изилдегиле.

Δ Мында, $x \neq 2k\pi$ болсо, $f'(x)$ аныкталат, анда $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары $x \neq 2k\pi$ чекиттердин бардыгында ал функциянын маанисине жыйналат (4-чийме). Дагы, $f(x)$



4-чийме

функциясы жуп, ошондуктан анын Фурьенин катарына ажыралышы бир гана косинусту кармайт. Эми коэффициенттерди аныктайлы:

$$\pi a_0 = -2\int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = -2\int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{x}{2} dx - 2\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx =$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{x}{2} dx - 2\int_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{x}{2} dx = -2\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\sin x\right) dx =$$

$$= \pi \ln 2 - 2\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \pi \ln 2 - \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= \pi \ln 2 + \frac{\pi}{2} a_0,$$

мындан

$$a_0 = 2\ln 2;$$

$$\pi a_n = -\int_0^{\pi} \cos nx \ln \sin \frac{x}{2} dx = -2\frac{\sin nx}{n} \ln \sin \frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+ 2\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2n \sin \frac{x}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} \left[D_n(x) + D_{n-1}(x)\right] dx,$$

мында $D_n(x)$ — Дирихленин ядросу (§6, (2) формуланы кара). Бул Дирихленин ядросунун (§6, (3) формула) касиети боюнча,

$\pi a_n = \frac{\pi}{n}$ жана ошондуктан, $a_n = \frac{1}{n}$.

Ошентип,

$$-\ln\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x = 2k\pi, \ k \in Z. \blacktriangle \qquad (4)$$

Эскертүү. (4) формулага $x < \pi$ десек, анда $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ катарын алабыз.

5-мисал. $[0,\ 4]$ аралыгында $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x \leqslant 3, \\ x - 3, & 3 < x \leqslant 4 \end{cases}$

функциясынын тригонометриялык катарын, $(-\infty,\ \infty)$ге мезгилдүү улантып тапкыла жана жыйналышын изилдегиле.

Δ Берилген $f(x)$ функциясын мезгилдүү улантабыз да, мезгили 4 санына барабар болгон жуп $\tilde{f}(x)$ функциясын алабыз (5-чийме). Анда $\tilde{f}(x)$ функциясынын тригонометриялык катарын төмөнкүчө жазабыз:

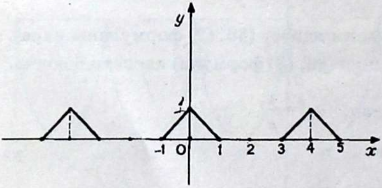
$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2},$$

мында

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(-\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1\right) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right].$$



5-чийме

Ошентип,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},$$

$x \in R$.

Үзгүлтүксүз $\tilde{f}(x)$ функциясы ар бир чекитте чектүү бир жактуу туундуга ээ болот. Демек, анда $\tilde{f}(x)$ үчүн Фурьенин катары бардык чекиттерде функциянын маанисине жыйналат. ▲

§ 9. БӨЛҮКТҮҮ ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ЖАНА БӨЛҮКТҮҮ ЖЫЛМА ФУНКЦИЯЛАР

Эгерде $[a, b]$ аралыгын x_i, $i = \overline{1,n}$ чекиттер аркылуу $a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ бөлүктөргө бөлүп, ар бир (x_{i-1}, x_i) интервалында $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болуп, $f(a+0)$, $f(b-0)$,. $f(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1, n-1}$ предели аныкталса, анда $f(x)$ функциясын $[a, b]$ аралыгында бөлүктүү үзгүлтүксүз функция дейбиз. Мисалы, жогорку 1-мисалдагы жана 2-мисалдагы функциялар бөлүктүү үзгүлтүксүз, 4-мисалдагы функция (графиги 4-чийме) бөлүктүү үзгүлтүксүз боло албайт.

Эгерде $[a, b]$ аралыгын жогоркудай бөлүктөргө бөлүп, ар бир (x_{i-1}, x_i) интервалдарында $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз $f'(x)$ туундуга ээ болсо жана $f'(a+0)$, $f'(b-0)$, $f'(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1, n-1}$ пределдери аныкталса, анда $f(x)$ функциясын $[a, b]$ аралыгында *бөлүктүү жылма функция* деп атайбыз. Бөлүктүү жылма функциялар $[a, b]$ аралыгындагы чектүү чекиттердин бардыгында аныкталат жана бөлүктүү үзгүлтүксүз функция боло алат. Бөлүктүү жылма функциялар үчүн Фурьенин катары, функция үзгүлтүксүз болгон чекиттердин бардыгында, бул функциянын маанисине жыйналат, ал эми ар бир үзүлүү чекиттерде ал функциялардын ошол чекиттеги пределдик маанилеринин жарым суммасына жыйналышат.

Эми жетиштүү жалпы эки функциялардын класстарын киргизели. $L^c(a,b)$ менен (a, b) интервалын бөлүктөргө бөлүп, ар бир $(x_{i-1}),\ x_i)$ интервалдарда $f(x)$ үзгүлтүксүз, ал эми өздүк эмес $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ интегралы жыйналуучу болгон функциялардын көптүгүн белгилейли. $L^c[a,b]$ менен $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз, $(a,\ b)$ интервалынын чектүү чекиттеринен башка бардык чекиттеринде дифференцирленүүчү жана $f'(x)\in L^c(a,b)$ функциялардын көптүгүн белгилейли.

Бул $L[a,b]$ функцияларынын классы төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1^0. Каалагандай $x\in[a,\ b]$ үчүн Ньютон-Лейбництин формуласы орун алат, б.а.

$$\int\limits_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a). \tag{1}$$

2^0. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $L^c[a,\ b]$ классына таандык болсо, анда алардын көбөйтүндүсү $f(x)\cdot g(x)\in$ $\in L^c[a,\ b]$ жана бөлүктөп интегралдоо формуласы орун алат, б.а.

$$\int\limits_a^x f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int\limits_a^x f(x)\cdot g'(x)dx,\quad x\in[a,\ b]. \tag{2}$$

1-лемма. *Сөзсүз*

$$g(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt \tag{3}$$

интегралы R де чектелген.

2-лемма. *Эгерде* $f(x)\in L^c[a,\ b]$ *жана* $f(0)=0$ *болсо, анда*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_0^b f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt = 0\,. \tag{4}$$

1-теорема. *$f(x)$ функциясы $L^c[-\pi,\ \pi]$ классындагы үзгүлтүксүз жана 2π — мезгилдүү функция болсун. Анда $f(x)$ функ-*

циясы үчүн Фурьенин катары ар бир $x \in R$ чекитте $f(x)$ функциясынын ушул чекиттердеги маанилерине жыйналат.

○ Далилдөө үчүн Фурьенин катарынын айрым суммасы § 6 дагы (8) формуланы жана Дирихленин ядросунун §6 дагы (3) формуласын колдонуп, $S_n(x) - f(x)$ айырмасын төмөнкүчө жазалы:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(x,u)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{4}{2}}du, \tag{5}$$

мында

$$\Phi(x,u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x). \tag{6}$$

Ал эми $u \to 0$ да

$$a(u) = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} = \frac{u - 2\sin\frac{u}{2}}{2u\sin\frac{u}{2}} \sim \frac{1}{24}u$$

болгондуктан, $a(u)$ функциясын $[0, \pi]$ аралыгында $u = 0$ чекитинде $u(0) = 0$ деп, кошумча аныктап, $a(u)$ функциясын $[0, \pi]$ аралыгында үзгүлтүксүз кылып алабыз. Ошондуктан Римандын леммасы боюнча

$$\lim_{\omega\to 0}\int_0^{\pi} \Phi(x,u)\, a\ (u)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)udu = 0 \tag{7}$$

барабардыгы аткарылат. Эгерде (5) барабардыктын оң жагындагы интеграл нөлгө умтулса, $n \to \infty$ да $S_n(x) \to f(x)$ ке умтулат.

Эгерде

$$\lim_{\omega\to 0}\int_0^{\pi} \Phi(x,u)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{u}du \tag{8}$$

интегралы нөлгө умтулса, (7) интегралдын негизи нөлгө умтулат. Анткени (8) интеграл $n \to \infty$ нөлгө умтулат, себеби ар кандай турактуу $x \in R$ үчүн $\Phi(x, u)$ функциясы u дан функция болуп, 2-лемманы канааттандырат, дагы 2π — мезгилдүү $L^c[a, b]$ классында үзгүлтүксүз жана $\Phi(x,0) = 0$.

Мына ошентип, $n \to \infty$ да (8) интеграл, демек, (5) интеграл нөлгө умтулат. Ошондуктан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, б.а. $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары каалаган $x \in R$ чекитинде функциянын ушул чекиттеги маанисине жыйналат. ●

§ 10. ФУРЬЕНИН КАТАРЫН МҮЧӨЛӨП ДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ ЖАНА ИНТЕГРАЛДОО

1. Фурьенин катарын мүчөлөп дифференцирлөө

1-теорема. *Эгерде $f(x)$ $L^c[-\pi, \pi]$ классынын үзгүлтүксүз жана 2π мезгилдүү функциясы болсо, анда $f'(x)$ туунду үчүн Фурьенин катары, $f(x)$ функциясына түзүлгөн Фурьенин катарынан, формалдуу түрдө дифференцирлөө жолу менен аныкталат.*

○ a_n жана b_n сандары $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин коэффициенттери, ал эми a'_n жана b'_n сандары $f'(x)$ функциясы үчүн Фурьенин коэффициенттери болсун. Анда $L^c[-\pi, \pi]$ классындагы функция үчүн бөлүктөп интегралдоо (2) формуласы орун алгандыктан, ушул формуланы $f(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн, мезгилдүүлүгүн эске алып, төмөнкүлөрдү алабыз:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0;$$

$$\pi a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = f(x)\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} nf(x)\sin nx dx =$$

$$= (-1)^n\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] + n\pi b_n, \qquad a_n' = nb_n;$$

$$\pi b_n' = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = f(x)\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} nf(x)\cos nx dx =$$

$$= -n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\pi na_n, \qquad b_n' = -na_n.$$

Ошондуктан,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n \cos nx + b_n \sin x),$$

б.а. $f'(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары, $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катарын формалдуу түрдө мүчөлөп дифференцирлөө жолу менен алынды. ●

1-натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы 2π — мезгилдүү жана бөлүктүү жылма функция болсо, анда $f'(x)$ туунду үчүн Фурьенин катары $f(x)$ функциясына түзүлгөн Фурьенин катарын формалдуу дифференцирлөө жолу менен алынат.

2-натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы 2π — мезгилдүү жана $k-1$ жолу үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция болсо, ал эми $f^{k-1}(x) \in L^c[-\pi, \pi]$, анда $f^k(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катарын k — жолу дифференцирлөө жолу менен алынат.

3-натыйжа. Эгерде 2-натыйжанын шарты аткарылса, анда Фурьенин коэффициенттери үчүн асимптотикалык

$$a_n = 0(n^{-k}), \quad b_n = 0(n^{-k})$$

формулалары $n \to \infty$ да орун алат.

○ 2-натыйжа боюнча $f^{(k)}(x)$ функциясынын тригонометриялык катарын жазалы:

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n \cos\left(nx + k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + n^k b_n \sin\left(nx + k\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

мында $n^k a_n$ жана $n^k b_n$ сандары $[-\pi, \pi]$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу $f^{(k)}(x)$ функциясынын коэффициенттери. Анда Римандын леммасынын натыйжасы боюнча, абсолюттуу интегралдануучу функция үчүн Фурьенин коэффициенттери $n\to\infty$ да нөлгө умтулушат.

Ошондуктан

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0,$$

б.а. $n\to\infty$ да

$$a_n = 0(n^{-k}), \quad b_n = 0(n^{-k}). \bullet$$

2. Фурьенин катарын мүчөлөп интегралдоо

2-теорема. $f(x)$ функциясы $L^c[-\pi, \pi]$ классында 2π — мезгилдүү функция болсун, анда $\forall x\in R$ үчүн

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k} + b_k \frac{1-\cos kx}{k} \tag{1}$$

барабардыгы орун алат, мында оң жакkы катар $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катарын мүчөлөп интегралдоо жолу менен алынган.

○ Биз

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2} \tag{2}$$

функциясын карайлы. Бул функция үзгүлтүксүз, себеби жыйналуучу өздүк эмес интеграл жогорку предели боюнча үзгүлтүксүз функция болот. Ал эми ар кандай $x\in R$ үчүн

$$\Phi(x+2\pi)-\Phi(x)=\int\limits_{x}^{2\pi+x}f(t)dt-a_0\pi=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)dt-a_0\pi=0$$

формуласы орун алат, мындан $\Phi(x)$ функциясынын 2π — мезгилдүүлүгү келип чыгат.

Дагы, $f(x)\in L^c(-\pi,\pi)$, анда $[-\pi,\ \pi]$ аралыгынын чектүү сандагы чекиттеринен башка чекиттерде $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз. Ошондуктан $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз чекиттерде $\Phi(x)$ функциясы туундуга ээ болот жана бул чекиттерде $\Phi'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2}$. Демек, $\Phi(x)$ функциясы $L^c[-\pi,\ \pi]$ классына таандык жана ага §9 дагы 1-теореманын шарты аткарылат жана $\Phi(x)$ функциясы үчүн Фурьенин катары ар кандай $x\in R$ чекитинде жыйналат. Эми

$$\Phi'(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx \tag{3}$$

болсун. Ушул $L^c[-\pi,\ \pi]$ классындагы функциялар үчүн бөлүктөп интегралдоо (§9, (2) формула) формуласы орун алгандыктан, $n\geqslant 1$ үчүн

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\Phi(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi'(x)\frac{\sin nx}{n}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\sin nxdx=-\frac{b_n}{n};$$

$$\tag{4}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Phi(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi'(x)\frac{\cos nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\cos nxdx=\frac{a_n}{n}.$$

Ал эми A_0 коэффициентин табуу үчүн (3) барабардыкты ар кандай $x \in R$ үчүн аткарылат деп ага $x = 0$ маанисин коюп,

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \tag{5}$$

барабардыгын алабыз. Ушул (4) жана (5) коэффициенттердин туюнтмаларын (3) барабардыкка коюп, (1) формуланын туура экендигине келебиз.

Натыйжа. 2π — мезгилдүү бөлүктүү үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясы үчүн (1) формула орун алат.

1-мисал. Жогорудагы $signx$ (§ 8, 1-мисал) функциясынын Фурьенин катарына ажыралышын эске алып,

а) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ барабардыктарын далилдегиле.

Δ Мында $signx$ функциясы бөлүктүү үзгүлтүксүз болгондуктан жана $sigx \in L^c(-\pi, \pi)$ (1-теорема боюнча),

$$\int_{\pi/2}^{x} sigx dx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

барабардыгы орун алат жана ушул барабардыктан а) барабардыгы келип чыгат. Эми а) барабардыгына $x = 0$ деп б) барабардыгын алабыз.

Эгерде в) катарынын суммасын s менен белгилесек, анда s үчүн

$$s = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \left(\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} s.$$

Мына, ушул барабардыктан $s = \frac{\pi^2}{6}$ барабардыгы келип чыгат. ▲

§ 11. ФУРЬЕНИН ИНТЕГРАЛЫ

Биз жогорудагы $[-l, l]$ аралыгында аныкталган $2l$ мезгилдүү бөлүктүү-үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясын Фурьенин катарына

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{1}$$

ажыратып, анын коэффициенттерин

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

формулалар аркылуу аныктаганбыз (§1, (11), (12) формуланы карагыла).

Эми $f(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралыгында аныкталып, төмөнкү шарттарды канааттандырсын:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = Q$ өздүк эмес интегралы бар болсун ($f(x)$ функциясынын абсолюттуу интегралдануучулук касиети);

2) ар кандай чектүү аралыкта $f(x)$ функциясы Фурьенин катарына ажырасын (бул учурда $f(x)$ функциясынан чектүү

аралыкта Дирихленин шартынын канааттандырылышын талап кылуу жетиштүү).

Мына ушул шарттар орун алса, анда l ди турактуу карманып, $[-l, \ +l]$ аралыгында $f(x)$ функциясын (1) Фурьенин катарына ажыратып, коэффициенттерин (2) формулалар менен аныктайбыз. Бул учурда a_n жана b_n коэффициенттер жеке гана $f(x)$ функциясынан көз каранды болбостон параметр l ден дагы көз каранды болот. Ошол (2) коэффициенттердин маанилерин (1) катарга коюп чыгабыз:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\right)\cos\frac{n\pi}{l}x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

же

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{n\pi}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x\right)dt$$

же болбосо

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt.$$

Эми nден көз каранды болгон $\alpha_n = \alpha$ өзгөрмөсүн киргизели:

$$\frac{n\pi}{l} = \alpha_n = \alpha \tag{3}$$

жана

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha \tag{4}$$

өсүндүсүн аныктасак, анда

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_n(x-t)dt\right)\Delta\alpha, \tag{5}$$

мында $f(x)$ функциясы абсолюттуу интегралдануучу болгондуктан l дин өсүшүнө жараша

$$\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha(x-t)dt$$

интеграл, өздүк эмес

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt$$

интегралынан мүмкүн болушунча аз айырмаланат. Мындан тышкары (5) формуланын оң жагы интегралдык сумманы элестетет. Ал сумманын кошулуучуларынын саны lдин өсүшүнө жараша өсөт, бирок ар бир кошулуучулары кемийт. Ошондуктан l өскөндө ал (5) сумма α боюнча интегралга умтулат:

$$\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right)d\alpha.$$

Андан ары, (5) формуланын биринчи кошулуучусу lдин өсүшүнө жараша нөлгө умтулат. Чындыгында эле,

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}Q \to 0.$$

Ошентип, $l \to \infty$ (5) формула

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right)d\alpha \tag{6}$$

түрүндө жазылат да бул формуланы Фурьенин интегралы деп атайбыз же болбосо $f(x)$ функциясын Фурьенин интегралына ажыратуу деп да айтышат.

Ушул Фурьенин интегралы $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болгон бардык x чекиттеринде орун алат. Ал эми үзүлүү чекиттерде

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right)d\alpha \tag{7}$$

формуласы орун алат.

Жыйынтыктап, төмөнкү теоремага келебиз.

Фурьенин теоремасы. Эгерде $f(x)$ функциясы $[-\infty,\ +\infty]$ аралыгында чектелип жана абсолюттуу интегралдануучу болсо, ал эми ар бир чектүү аралыкта Дирихленин шартын канааттандырса, анда ар кандай $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болгон x чекитинде (6) формула орун алат, $f(x)$ үзгүлтүккө учураган x чекитинде (7) формула орун алат.

Дагы, (6) формулага кайрылып, андагы косинустун айырмасын ажыратып, аны

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha \tag{8}$$

түрүндө жазууга болот. Мында t боюнча алынуучу интегралдардын ар бири аныкталган, анткени $f(t)$ функциясы $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгында абсолюттуу интегралдануучу функция, демек, анда $f(t)\cos\alpha t$ жана $f(t)\sin\alpha t$ функциялары дагы абсолюттуу интегралдануучу болушат.

Эгерде (8) формулага

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt,\ b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt \tag{9}$$

белгилөөсүн киргизсек, анда (8) формула

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha \tag{10}$$

түрүнө келет да сырт жагынан Фурьенин катарына окшоштугу айрыкча байкалат (бул жерде сумманын ордунда интеграл турат). Мындай окшоштук (9) формулалар менен Фурьенин коэффициенттери үчүн жазылган формулалардын арасында дагы байкалат.

Эми, эгерде берилген $f(x)$ функциясы жуп функция болсо, анда $f(t)\cos\alpha t$ жуп болуп, $f(t)\sin\alpha t$ так функция болот да:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt=2\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt=0$$

барабардыгына ээ болобуз жана жуп $f(x)$ функциясы үчүн (8) формула

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha \tag{8'}$$

түрүнө келет.

Ал эми эгерде $f(x)$ *так функция* болсо, анда (8) формула

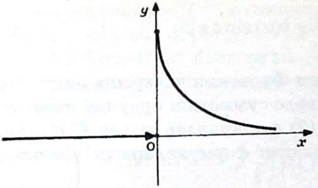
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha \tag{8''}$$

түрүндө жазылат.

Мындагы (8′) жана (8″) интегралдарын ирети менен жуп функция жана так функция үчүн Фурьенин интегралы деп аташат. Бул учурда дагы үзгүлтүксүз чекиттеринде (8′) жана (8″) формулалардын сол жактарында $f(x)$ болуп, ал эми үзүлүү чекиттеринде $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ туюнтмасын жазуу керек.

Мисалдар: 1. $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{жана } x>0, \\ 0 & \text{эгерде } x<0 \end{cases}$

функциясын Фурьенин интегралына ажыраткыла (6-чийме).



6-чийме

Δ Ар кандай $x \geqslant 0$ маанисинде $e^{-x} \leqslant 1$ жана

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-x} \Big|_{0}^{\infty} = 1.$$

Ошондуктан $f(x)$ функциясы $(-\infty, \infty)$ аралыгында чектелген жана абсолюттуу интегралдануучу. Мындан тышкары e^{-x} функциясы монотондуу кемийт жана ошондуктан $f(x)$ функциясы Дирихленин шарттарын толук канааттандырат. Ушул айтылгандардан, Фурьенин теоремасынын негизинде, $f(x)$ функциясы Фурьенин интегралына ажырайт. Анда (6) формула боюнча

$$J(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (x - t) dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos \alpha (x - t) dt,$$

же эки жолу бөлүктөп интегралдоо формуласын колдонуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$J(x, \alpha) = -e^{-t} \cos \alpha (x - t) \Big|_{0}^{\infty} + \alpha \int_{0}^{\infty} e^{-t} \sin \alpha (x - t) dt =$$

$$= \cos \alpha x - \alpha e^{-t} \sin \alpha (x - t) \Big|_{0}^{\infty} -$$

$$- \alpha^2 \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos \alpha (x - t) dt =$$

$$= \cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x - \alpha^2 J(x, \alpha).$$

Мындан

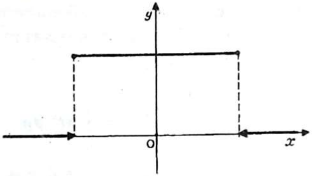
$$J(x, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2} (\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x).$$

Ошентип, (6) формула бул учурда

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha$$

түрүндө жазылат. ▲

2. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{эгерде } |x| \leq l, \\ 0, \text{ башка учурларда,} \end{cases}$ жуп функциясын Фурьенин интегралына ажыраткыла (7-чийме).



7-чийме

Δ Бул функциянын чектелгендиги, чексиз интервалда интегралдануучулугу жана Дирихленин шартын ар кандай чектүү аралыкта канааттандыра тургандыгы көрүнүп турат.

Ошондуктан аны Фурьенин интегралына ажыратууга болот. Ал үчүн (8′) формуланы колдонобуз:

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos \alpha t dt = \int_0^{l} \cos \alpha t dt = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha l.$$

Анда

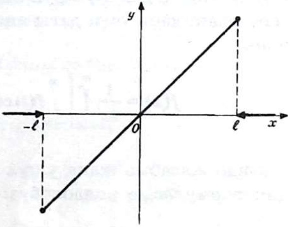
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha.$$

Бул формула $x = \pm l$ чекитинен башка xтин бардык маанилерине туура келет. Ал эми $x = \pm l$ чекитинде Фурьенин интегралы $1/2$ маанисине ээ болот. ▲

3. Фурьенин интегралына $f(x)$ так функциясын ажыраткыла:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{эгерде } |x| \leq l, \\ 0, \text{ башка учурда} \end{cases}$$

(8-чийме).



8-чийме.

Мында $f(x)$ функциясынын чектелгендиги, абсолюттуу интегралдануучулугу жана Дирихленин шартын канааттандыргандыгы көрүнүп турат. Анда (8″) боюнча

$$J(\alpha)=\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t dt=\int_0^l t\sin\alpha t dt,$$

же бөлүктөп интегралдоо формуласын колдонобуз:

$$J(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}t\cos\alpha t\Big|_0^l+\frac{1}{\alpha}\int_0^l\cos\alpha t dt=-\frac{l\cos\alpha l}{\alpha}+\frac{\sin\alpha l}{\alpha^2}.$$

Ошондуктан

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha l\cos\alpha l-\sin\alpha l}{\alpha^2}\sin\alpha x d\alpha.$$

Бул формула $x=\pm l$ чекитинен башка x тин бардык маанилеринде жарамдуу.

§ 12. ФУРЬЕНИН КОМПЛЕКСТИК ФОРМАДАГЫ ИНТЕГРАЛЫ

Фурьенин (6) аркылуу туюнтулган интегралында кашаанын ичинде α дан жуп функция турат, анда ал функция α нын терс маанилери үчүн дагы аныкталган болот да ал (6) формуланы

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)dt\right)d\alpha \tag{11}$$

түрүндө жазабыз жана ушул формуладагы косинуска Эйлердин формуласын колдонобуз:

$$\cos\alpha(x-t)=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha(x-t)}+e^{-i\alpha(x-t)}\right).$$

Анда биз

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(e^{i\alpha(x-t)}+e^{-i\alpha(x-t)}\right)dt\right)d\alpha$$

же

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dt\right)d\alpha+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha(x-t)}dt\right)d\alpha .$$

Бул барабардыктын оң жагына $z=-\alpha$ алмаштыруусун колдонсок, анда алар бири-бирине барабар болушат. Андан

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dt\right)d\alpha \tag{12}$$

формуласына ээ болобуз. Бул формуланы Фурьенин комплекстик формадагы интегралы деп айтабыз.

Мисалы, биз §11 деги 2-мисалды Фурьенин комплекстик формадагы интегралына ажыраталы,

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ эгерде } |x|\leqslant l,\\ 0, \text{ эгерде } |x|>l.\end{cases}$$

Бул убакта (12) формуланын ички интегралы

$$\int_{-l}^{l}e^{i\alpha(x-t)}dt=-\frac{1}{i\alpha}e^{i\alpha(x-t)}\Big|_{-l}^{l}=-\frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha(x-l)}-e^{i\alpha(x+l)}\right)=$$

$$=\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\cdot\frac{e^{i\alpha l}-e^{-i\alpha l}}{i}=\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}2\sin\alpha l \text{ ге барабар.}$$

Андан, төмөнкүдөй интегралга ээ болобуз:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha l}{\alpha}e^{i\alpha x}d\alpha.$$

§ 13. ФУРЬЕНИН ӨЗГӨРТҮП-ТҮЗҮҮЛӨРҮ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Алдыдагы (12) формулага α ны $-\alpha$ менен алмаштырып,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

түрүндө жазып жана

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt \tag{13}$$

белгилөө жүргүзсөк, анда

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{14}$$

формуласына ээ болобуз.

Мында $f(x)$ функциясынан $F(\alpha)$ функциясына (13) формула боюнча өтүү, $f(x)$ функциясы үчүн Фурьенин өзгөртүп-түзүүчүсү деп аталат. Ал эми тескерисинче, $F(\alpha)$ функциясынан $f(x)$ функциясына өтүү, Фурьенин тескери өзгөртүп-түзүүчүсү деп аталат. Бул түз жана тескери өзгөртүп-түзүүлөр i нин белгилери менен гана айырмаланышат.

1. Фурьенин косинус өзгөртүп-түзүүчүсү

Берилген $f(x)$ функциясы жуп функция болсун. Анда (8′) формуланы

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha dt\right)\cos\alpha x d\alpha, \tag{8′}$$

биз төмөнкүчө

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha \tag{15}$$

деп жазып алабыз жана

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \tag{16}$$

белгилөө киргизсек, анда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \tag{17}$$

формуласына ээ болобуз.

Мында (16) формула $f(x)$ жуп функциясы үчүн Фурьенин косинус өзгөртүп-түзүүчүсү деп аталат, ал эми (17) формула Фурьенин тескери косинус өзгөртүп-түзүүчүсү деп аталат.

2. Фурьенин синус өзгөртүп-түзүүчүсү

Берилген $f(x)$ функциясы так функция болсун, анда (8″) формуласын жогорудагыдай эле өзгөртүп,

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$$

Фурьенин синус өзгөртүп-түзүүчүсүн алабыз, ал эми Фурьенин тескери синус өзгөртүп-түзүүчүсү

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$$

түрүндө жазылат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөнкү мезгили T болгон мезгилдүү $f(x)$ функциясын көрсөтүлгөн аралыкта Фурьенин катарына ажыраткыла:

а) $f(x) = x$, $T = 2\pi$, $[-\pi, \pi]$;

б) $f(x) = |x|$, $T = 2$, $[-1, 1]$;

в) $f(x) = e^x$, $T = 2\pi$, $[-\pi, \pi]$;

г) $f(x) = \pi - 2x, \qquad T = 2\pi, \qquad [-0,\ \pi];$

д) $f(x) = \begin{cases} -h, & \text{эгерде } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ h, & \text{эгерде } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi;$

ж) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{эгерде } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & \text{эгерде } 0 < x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi;$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } 0 \leqslant x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{эгерде } x = a, \\ 0, & \text{эгерде } x > a. \end{cases}$

Косинус жана синус өзгөрүүлөрүн аныктагыла.

3. Фурьенин өзгөрүүлөрүн тапкыла;

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{эгерде } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ 1, & \text{эгерде } |x| < \frac{1}{2}, \\ -x+1, & \text{эгерде } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{эгерде } 1 < |x|. \end{cases}$$

4. Фурьенин интегралына ажыраткыла:

а) $\varphi(x) = \begin{cases} -e^{x}, & \text{эгерде } x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & \text{эгерде } x > 0; \end{cases}$

б) $P(x) = \begin{cases} 2, & \text{эгерде } 0 < x < 3, \\ 1, & \text{эгерде } x = 3, \\ 0, & \text{эгерде } x > 3. \end{cases}$

XII глава

ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДАР

I. КОШ ИНТЕГРАЛ

§ 1. КОШ ИНТЕГРАЛДЫН АНЫКТАМАСЫ

1. Жалпак фигураны майда бөлүктөргө бөлүү

Биз R^2 тегиздигиндеги D көптүгүнүн чекиттерин жалпак фигура деп айтарыбыз белгилүү. Ал фигуранын каалаган эки чектик чекиттеринин аралыгын $d(M_1, M_2)$ менен белгилесек, анда бул аралык өз иретинде көптүктү түзөөрү да белгилүү. Ошол көптүктөрдүн ичинен накта жогорку чегин

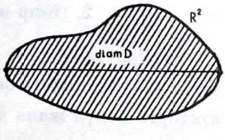
$$diamD = \sup\{d(M_1, M_2) : M_1 \in D,\ M_2 \in D\},$$

D фигурасынын диаметри деп атайбыз (9-чийме).

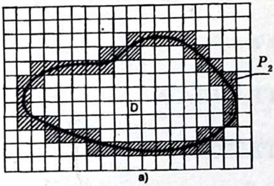
Эгерде D фигурасы чектелген болсо, анда $diamD < +\infty$. Фигуранын чеги, аянты мурдатадан берилген эң кичине оң сандан кичине болгон көп бурчтукка камтууга мүмкүн болсо, анда D чектелген фигурасы сөзсүз аянтка ($mesD$) ээ болот (10-а, б чиймелер).

Ушул учурда D нын чеги нөл аянтына ээ, ал эми фигура квадратталынат. Ошентип, чектелген фигураларды квадратталуучу фигуралар, б.а. аянтка ээ болуучу фигуралар деп атайбыз.

Чектелген сандагы квадратталуучу фигуралардын көптүктөрүнүн биригүүсү жана кесилиши квадратталуучу болот. Бөлүктүү-жылма ийри сызык менен чектелген фигуралар дагы квадратталуучу фигуралар боло алышат.

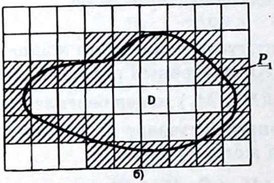


9-чийме



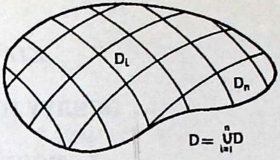
а)

$$mesP_2 < \frac{1}{2}\, mesP_1$$



б)

10-чийме



11-чийме

Мындан ары биз дайыма квадратталуучу фигураларды карайбыз.

Алардын аянтын $mesD$ же $\Delta\sigma$ менен белгилейбиз.

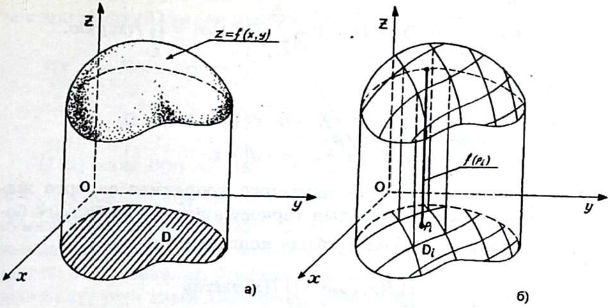
Камтылган көптүктөрдүн жыйындысын $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, $D_i \subset D,\ i = \overline{1,n}$, D ны майдалоо дейбиз. Эгерде $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D$ жана кесилиш $D_i \cap D_j,\ (i \neq j)$ D_i нин $i = \overline{1,n}$ ички чекитин кармабаса (11-чийме),

$$\sum_{i=1}^{n} mesD_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = mesD = \Delta\sigma$$

барабардыгы аткарылса, ал эми $\rho = m_i ax\{diamD_i\}$ чоңдугун диаметрди майдалоо дейбиз.

2. Кош интегралдын аныктамасы

Квадратталуучу D областында чектелген $f(x, y)$, $f(x, y) : D \to R$ функциясы берилсин. Эрктүү түрдө Dны майда бөлүктөргө бөлүп жана ар бир бөлүктөн эрктүү түрдө $P_i(x_i, y_i)$ чекитин тандап алып,



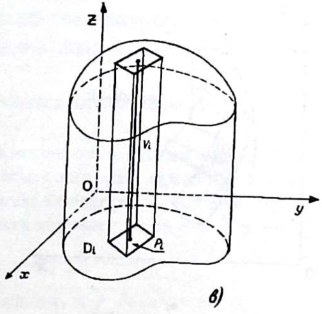
12-*а*, *б* чиймелер

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)mesD_i=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

интегралдык суммасын түзөбүз.

Мында $|f(P_i)|mesD_i$ көбөйтүндү негизи D_i жана бийиктиги $|f(P_i)|$ болгон цилиндрдин көлөмүн берет (12-*а*, *б*, *в* чиймелер).

Аныктама. *Эгерде интегралдык сумма $\rho\to 0$ кезде, квадратталуучу D областын кандайча n бөлүккө бөлүүдөн жана ар бир D_i бөлүкчөдөн P_i чекитин кандайча тандап алууга карабастан, бир гана чектүү J пределге ээ болсо, анда ал пределди $f(x,y)$ функциясынын $D\subset R^2$ областындагы кош интегралы деп атайбыз:*



12-*в* чийме

$$J = \lim_{\rho \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) mesD_i = \lim_{\rho \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x,y)d\sigma.$$

Кыскача:

$$J = \iint_D f(x,y)d\sigma \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall\{D_i\}, \quad \forall P_i \in D_i \\ \rho\{D_i\} < \delta \Rightarrow |\sigma - J| < \varepsilon. \end{array}$$

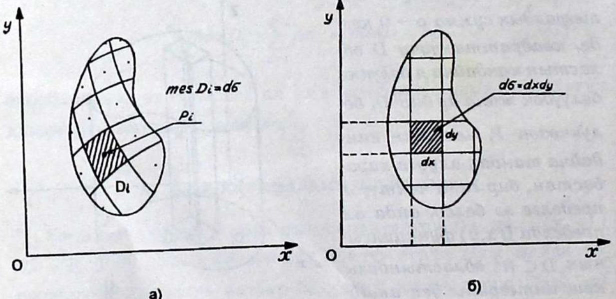
D областын майда бөлүкчөлөргө координат окторго жарыш болгон түз сызыктардын торчосу аркылуу да бөлүүгө болот. Бул учурда $d\sigma = dxdy$. Анда кош интегралды

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

түрүндө жазууга болот (13-а, б чиймелер).

3. Кош интегралдын бар болушунун шарты

Кандайдыр бир квадратталуучу D областында аныкталган $f(x,y)$ функциясынын кош интегралы бар болуш үчүн, ал функцияга кандай шарттар талап кылынаарына токтололу. Анткени, кош интегралдын аныктамасын берүүдө $f(x,y)$ функция-



13-чийме

сы чектелген функция болсун дегенбиз. Бирок бардык эле чектелген функциялар интегралданбайт. Мисалы, функция

$$f(x,y)=D(x)\cdot D(y)=\begin{cases}1, & \text{эгерде } x \text{ жана } y \text{ рационалдык сан,}\\ 0, & \text{жок дегенде } (x,\ y) \text{ чекитинин координатасынын бирөө иррационалдык сан болсо.}\end{cases}$$

($D(x)$ жана $D(y)$ — Дирихленин функциялары), $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 1$ көптүгүндө чектелген, ал эми түзүлгөн интегралдык сумма пределге ээ болбойт. Ошентип, функциянын D областында чектелиши анын интегралдануучулугунун зарыл гана шарты болуп саналат. Функциянын интегралдануучулук шартын билүү үчүн анык интегралдын учурундагыдай эле, Дарбунун жогорку жана төмөнкү суммаларын колдонсок болот.

Эгерде $f(x,y)$ функциясынын D областындагы бөлүкчөлөрүндөгү эң кичине маанисин m_i, ал эми эң чоң маанисин M_i аркылуу белгилесек, б.а. $m_i\leqslant f(x,y)\leqslant M_i$ болсо, анда

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i \quad \text{жана} \quad s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i$$

түрүндөгү Дарбунун суммаларын түзүүгө болот.

Ар бир D_i аянтчасынан алынуучу $P_i(x_i,y_i)$ чекитин каалашыбызча тандап алууга мүмкүн болгондуктан, функциянын $f(P)_i$ маанисин m_i же M_i ге өтө жакын кылууга болот, демек, анда $\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i$ интегралдык суммасы Дарбунун төмөнкү же жогорку суммасына ошончолук жакын болот. Мына ошентип, Дарбунун төмөнкү жана жогорку суммалары ирети менен D областын ошол эле майда бөлүгүнө туура келүүчү интегралдык суммаларынын накта жогорку жана накта төмөнкү грандары боло алат, б.а.

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i=S\,.$$

Ушул Дарбунун суммалары аркылуу $f(x, y)$ функциясынын интегралынын бар болушу жөнүндөгү теореманы төмөндөгүчө айтууга болот.

1-теорема. *$f(x, y)$ функциясынын кош интегралы бар болушу үчүн*

$$\lim_{\rho\to 0}(S - s) = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0$$

барабардыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү шарт болуп саналат.

Мында $\omega_i = M_i - m_i$ ошол $f(x, y)$ функциясынын D_i бөлүкчөсүндөгү термелүүсү.

Дарбунун суммаларынын касиеттерин, теореманын далилдөөсүн окуучуларга сунуш кылабыз.

Квадратталуучу D областы боюнча, кош интегралы аныкталган $f(x, y)$ функциясын D областында интегралдануучу функция деп айтабыз.

4. Негизги интегралдануучу функциялардын класстары

Алдыдагы биринчи теореманы колдонуп, биз бул пунктта бир катар негизги интегралдануучу функциялардын класстарын түзөбүз жана биринчи иретте үзгүлтүксүз функцияларга токтолобуз. Каралган функциялардын бардыгы кандайдыр бир чектелген туюк квадратталуучу областтарда берилсин деп эсептейли.

2-теорема. *Ар кандай $f(x, y)$ функциясы чектелген туюк квадратталуучу D областында үзгүлтүксүз болсо, ал D да интегралдануучу функция болот.*

○ Шарт боюнча $f(x, y)$ функциясы чектелген туюк D областында үзгүлтүксүз болгондуктан, ал ошол эле областта чектелген жана бир калыпта үзгүлтүксүз функция болот. Ал эми $f(x, y)$ бир калыпта үзгүлтүксүз болгондуктан ар бир $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta > 0$ саны аныкталып, $diam D_i < \delta$ болгондо $M_i - m_i < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат. Анда

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \varepsilon mes D,$$

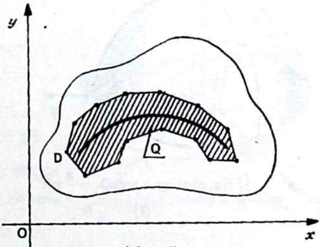
демек, $f(x, y)$ функциясы интегралдануучу функция. ●

3-теорема. *Эгерде $f(x, y)$ функциясы чектелген туюк D областында чектелсе жана нөл аянттуу көптүктөн башка D нын бардыгында үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x, y)$ функциясы D да интегралдануучу функция болот.*

○ Эрктүү $\varepsilon > 0$ санын алалы. Шарт боюнча $f(x, y)$ чектелгендиктен $|f(x, y)| < k$ орун алгандай k саны табылат. Эми $f(x, y)$ функциясы үзгүлтүккө учуроочу көптүктү, аянты $\varepsilon/4k$ дан кичине болгон Q көп бурчтугунун ичине киргизели (14-чийме).

D нын Q га кирбеген бөлүгүн $\overline{Q}$ менен белгилейли жана D га тиешелүү болгон Q көп бурчтуу фигуранын чектик чекиттерин да $\overline{Q}$ га тиешелүү кылалы, анда $\overline{Q}$ туюк көптүк болот. Туюк $\overline{Q}$ көптүктө $f(x, y)$ үзгүлтүксүз, демек, анда бир калыпта үзгүлтүксүз. Эми $\delta > 0$ санын, $\overline{Q}$ фигурасынын ар кандай бөлүгүнүн диаметри δ дан кичине болгудай жана $f(x, y)$ функциясынын термелүүсү $\varepsilon/2\sigma$ дан кичине болгудай кылып тандап алалы (σ болсо D нын аянты). Биз эми D нын төмөнкүдөй майда $\{D_i\}$ бөлүкчөлөрүн карайбыз; анын биринчи D_1 элементин Q аткарат, ал эми калгандары δ дан кичине болгон диаметрге ээ болот. Ушул бөлүнүшкө туура келген $S-s$ айырманы чамалайлы:

$$S - s = M_1\Delta\sigma_1 - m_1\Delta\sigma_1 + \sum_{i=2}^{n}(M_i - m_i)\Delta\sigma_i <$$



14-чийме

$$< (M_i - m_i)\frac{\varepsilon}{4k} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon}{2\sigma} \cdot \Delta\sigma_i,$$

бирок

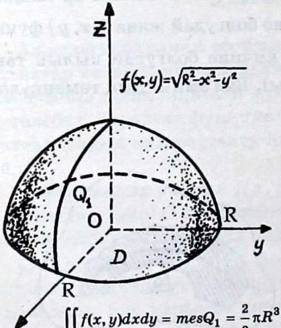
$(M_i - m_i) < 2k$, **ал эми** $\sum\limits_{i=2}^{n} \Delta\sigma_i < \sigma$ **болгондуктан**

$$S - s < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} + \frac{\varepsilon}{2\sigma} \cdot \sigma = \varepsilon.$$

Демек, $\varepsilon > 0$ **эрктүү болгондуктан 1-теореманын негизинде интегралдануучу функция болот.** ●

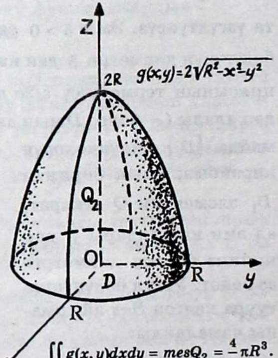
5. Кош интегралдардын касиеттери

1^0. Сызыктуу касиети. Эгерде $f(x, y)$ жана $g(x, y)$ функцияларынын ар бири D көптүгүндө интегралданышса жана



$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = mesQ_1 = \frac{2}{3}\pi R^3.$

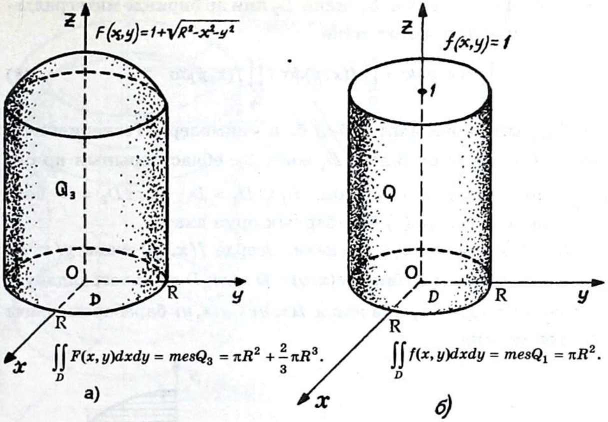
а)



$\iint\limits_{D} g(x, y)dxdy = mesQ_2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$

б)

15-чийме



16-*а, б* чиймелер

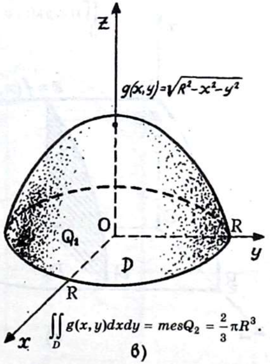
$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, анда $\alpha f + \beta g$ функциясы D да интегралдануучу функция болот жана

$$\iint\limits_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) d\sigma =$$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint\limits_D g(x,y) d\sigma$$

барабардыгы орун алат (15-*а, б* чиймелер, 16-*а, б, в* чиймелер).

2^0. **Аддитивдик касиети.** Эгерде $D = D_1 \cup D_2$ болуп, D_1 жана D_2 жалпы ички чекитке ээ болбосо, анда $f(x, y)$ тин D да инте-



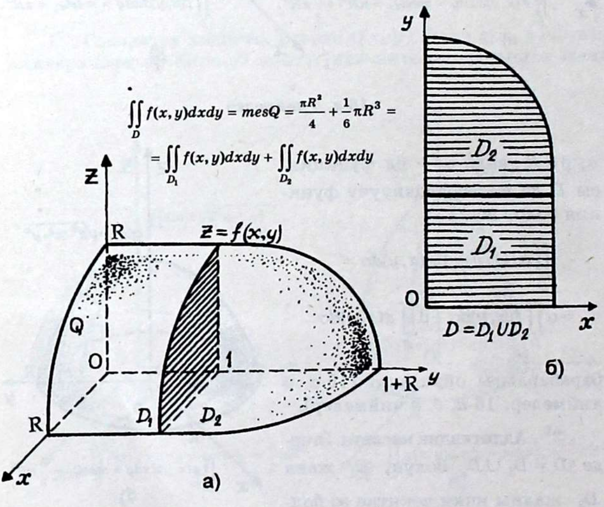
16-*в* чийме

гралданышынан, анын D_1 жана D_2 нин ар биринде интегралдануучулугу келип чыгат жана

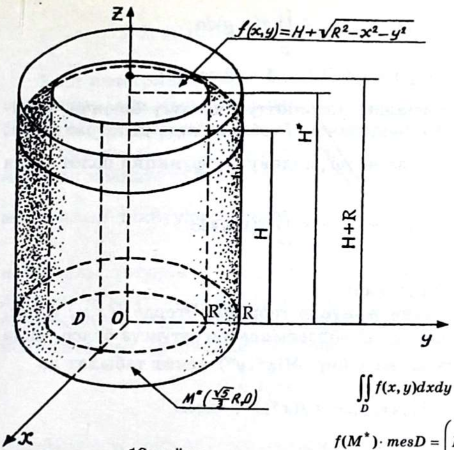
$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma \qquad (*)$$

барабардыгы орун алат (16-а, б, в чиймелер). Тескерисинче, эгерде $f(x, y)$ функциясы D_1 жана D_2 областтарынын ар биринде интегралдануучу жана $D_1 \cup D_2 = D$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ болсо, анда деле сөзсүз (*) барабардык орун алат.

3^0. **Монотондуулук касиети.** Эгерде $f(x, y)$ жана $g(x, y)$ функцияларынын ар бири $\forall(x,y) \in D$ үчүн D да интегралдануучу функциялар болушса жана $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда



17-чийме



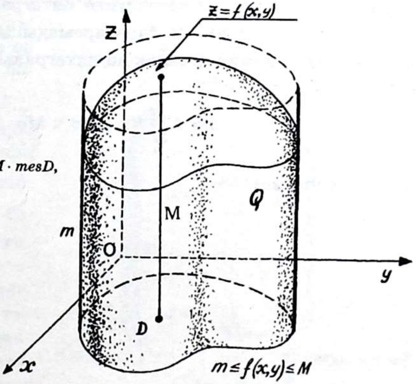
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

$$f(M^*)\cdot mesD = \left(H + \sqrt{R^2 - \frac{5}{9}R^2}\right)\pi R^2$$

18-чийме

$$m\cdot mesD \leq \iint_D f(x,y)d\sigma \leq M\cdot mesD,$$

$$\forall (x,y)\in D$$



19-чийме

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)d\sigma$$

барабарсыздыгы орун алат (17-*а, б* чиймелер).

4^0. Кош интегралды абсолюттук чоңдугу боюнча чамалоо. Эгерде $f(x, y)$ функциясы D областында интегралданса, анда $|f(x,y)|$ дагы D да интегралдануучу функция болот жана

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|d\sigma$$

барабарсыздыгы орун алат.

5^0. Орточо маани жөнүндө теорема. Эгерде $f(x,y)$ функциясы квадратталуучу D областында үзгүлтүксүз болсо, анда ал областтан жок дегенде бир $M(x^*, y^*)$ чекит табылат да

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(x^*, y^*)\cdot mesD$$

барабардыгы орун алат (18-чийме).

6^0. Кош интегралдын чектелиши. Эгерде $f(x, y)$ функциясы, аянты σ болгон D көптүгүндө интегралдануучу функция болсо жана $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ барабарсыздыгын канааттандырса, анда $f(x, y)$ функциясынын кош интегралы D областында чектелген, б.а.

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant M\sigma$$

болот (19-чийме).

§ 2. КОШ ИНТЕГРАЛДЫ ЭСЕПТӨӨ

Кош интегралды эсептөө үчүн аны x жана y боюнча интегралданма, эки ирет кайталана турган интегралга келтирүүгө болот. Мындай интегралды эки кайталанма интеграл дейбиз.

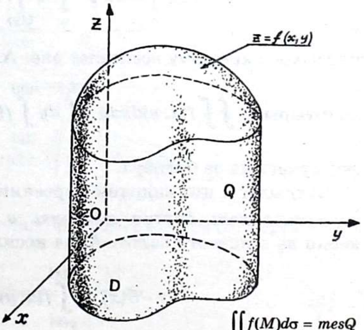
Бизге квадратталуучу D областында үзгүлтүксүз жана дайыма оң мааниге ээ болуучу $f(x, y)$ функциясы берилсин. Геометриялык талкууланышынан пайдалансак, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ кош интегралы, үстүнөн $z = f(x, y)$ бети, асты жагынан $z = 0$ тегиздиги жана капталынан түзүүчүлөрү oz огуна параллель болуп, багыттоочусу D областынын чеги болгон цилиндрдик бет менен чектелген цилиндрдик нерсенин көлөмүн, атап айтканда,

$$V = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \tag{1}$$

барабардыгы орун аларын билебиз (20-чийме).

Кош интегралдын аныктамасында, ал интеграл D областын майда бөлүктөргө кандайча кылып бөлүүгө көз каранды болбостон аныкталарын айткан элек.

Ошондуктан Dны бөлүктөргө ox жана oy окторуна параллель болушкан $x = const$, $y = const$ түз сызыктары аркылуу бөлсөк, анда $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ же жалпы түрдө $d\sigma = dxdy$ болору ачык. Ошентип, декарттык координаталар системасында аянттын элементин көз каранды эмес өзгөрмөлөрдүн дифференциалдарынын көбөйтүндүсү



$$\iint\limits_D f(M)d\sigma = mesQ$$

20-чийме

аркылуу туюнтууга болот. Анда (1) барабардыктагы $d\sigma$ аркылуу жазылган интегралды

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (2)$$

түрүндө жазсак, анда цилиндрдик нерсенин көлөмүн

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (3)$$

интегралы аркылуу эсептөөгө болот. Ал эми цилиндрдик нерсенин көлөмүн бизге белгилүү болгон аныкталган интегралдын жардамы менен эсептеп көрөлүк. Ал үчүн цилиндрдик нерсени *xoz* тегиздигине параллель болгон $y = const$ $(\alpha \leqslant y \leqslant \leqslant \beta)$ тегиздиги менен кессек, кесилиште

$$S(y) = \int\limits_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)dx$$

аянты пайда болуп (21-*а*,чийме), көлөм

$$V = \int\limits_{\alpha}^{\beta} S(y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)dx \qquad (4)$$

интегралы аркылуу эсептелет эле. Ал эми (3) менен (4) тү салыштырып,

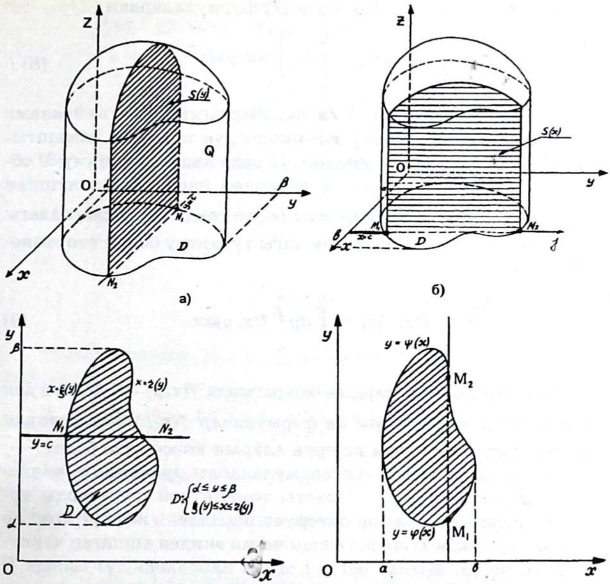
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)dx \qquad (5)$$

формуласына ээ болобуз.

Алдыдагы цилиндрдик нерсенин V көлөмүн *yoz* тегиздигине параллель болгон $x = const$ $a \leqslant x \leqslant b$ тегиздиги менен кесип да эсептөөгө болот. Анда кесилиште (21-б, чийме).

$$S(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

аянты пайда болуп, көлөм



$D:\begin{cases} \alpha \leqslant y \leqslant \beta \\ \xi(y) \leqslant x \leqslant \xi(y) \end{cases}$

21-чийме

$D:\begin{cases} a \leqslant x \leqslant \beta \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(y) \end{cases}$

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \tag{6}$$

интегралы аркылуу эсептелет. Жогоркудай эле (3) менен (6)ны салыштырып,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \tag{7}$$

формуласына ээ болобуз.

Ошентип, алынган (5) жана (7) формулалардан

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)dx \tag{8}$$

барабардыгын жазабыз. Бул барабардыкты эки кайталама интегралда интегралдоочу өзгөрмөлөрдүн тартибин алмаштыруучу формула деп да айтышат. Эгерде квадратталуучу D областы, жактары ox жана oy окторуна параллель болушкан $a \leqslant x \leqslant b$; $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ тик бурчтугу болсо, анда (8) формуладагы ички интегралдын пределдери дагы туруктуу болуп өтө жөнөкөй түргө келет:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{9}$$

Алынган формулалардын бардыгында $f(x,y) > 0$ болсун деп болжолдогон элек, бирок ал формулалар $f(x,y)$ каалагандай (оң, терс) функция үчүн да орун аларын көрсөтүүгө болот.

Жогоруда далилденген формулаларды практикада колдонууда, интегралдоочу D областы төмөнкүдөй шарттарды канааттандырсын: ox же oy окторуна параллель жүргүзүлгөн ар кандай түз сызык D областынын чегин экиден ашпаган чекитте кесип өтсүн. Мында $oy(ox)$ огуна параллель түз сызык D чегин экиден ашпаган чекитте кесип өтсө, ал областты $oy(ox)$ багыты боюнча жөн эле дурус область дейбиз. Ал эми D татаал түрдө берилсе, анда аны ox же oy окторуна карата жөнөкөй дурус областтарга бөлүп, андан кийин кош интегралдын касиеттерин жана алдыдагы формулаларды ар бир бөлүнгөн жөнөкөй областтарга колдонуу керек.

Мисалдар: 1. $D = \{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ тик бурчтугунда $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ кош интегралын эсептегиле.

Δ Адегенде (9) формуланын биринчи барабардыгы аркылуу эсептейли:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1.$$

Эми (9) дун экинчи барабардыгы боюнча эсептейбиз:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y)dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy = 1.$$

Мына ошентип, эки учурда тең эле бирдей натыйжага ээ болдук. ▲

2. $D = \left\{ (x, y):\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ \ x^2 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$ болсо (22-чийме), анда

$\iint\limits_D x^2 dxdy$ интегралын эсептегиле.

∆ Эсептөө үчүн (8) формуланы колдонобуз. Биринчиден,

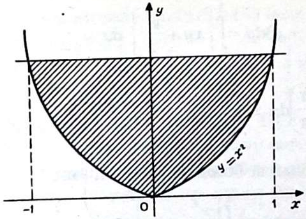
$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 dy = \int_{-1}^1 x^2(1 - x^2)dx = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}.$$

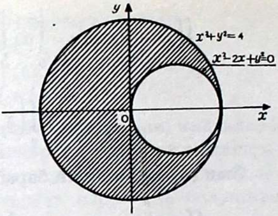
Экинчиден,

$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 dx = 2\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{y^3}\, dy = \frac{4}{15}. \ ▲$$



22-чийме



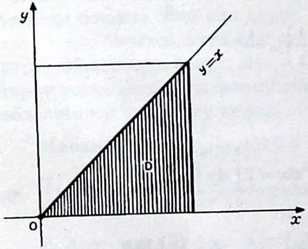
23-чийме

3. Эгерде область $x^2-2x+y^2=0$ жана $x^2+y^2=4$ айланалары менен чектелсе, анда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ интегралын кайталанган интегралга келтирели (23-чийме).

Δ Берилген область *oy* огуна карата үч жөнөкөй дурус областтарга бөлүнөт. Ошондуктан

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy. \ \blacktriangle$$



24-чийме

4. $J=\int\limits_{0}^{\pi/2} dy \int\limits_{y}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ кайталанган интегралын эсептегиле.

Δ Берилген J интегралы $f(x,y)=\frac{\sin x}{x}$ функциясынын D областы (24-чийме) боюнча алынуучу кош интегралга барабар. Бул область ox жана oy окторуна карата дурус область. Анда

$$J = \int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \cdot x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1. \blacktriangle$$

5. Эгерде D область $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $y = \sqrt{2ax}$ жана $x = 2a$ (25-чийме) ийри сызыктары менен чектелген учурунда $\iint_D f(x, y) dxdy$ интегралын кайталанган интегралга келтиргиле.

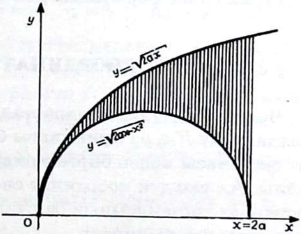
$\triangle$ Бул мисалды эки жол менен кайталанган интеграл түрүндө жазалы. Биринчиден

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy,$$

экинчиден,

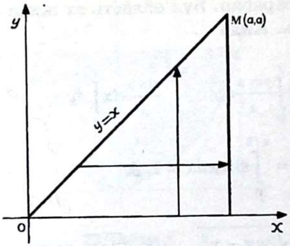
$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx +$$

$$+ \int_0^a dy \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y) dx. \blacktriangle$$



25-чийме

6. D областында $y = x$, $y = 0$ жана $x = a$ түз сызыктары менен чектелген үч бурчтук болгон учурда (26-чийме) $\iint_D f(x, y) dxdy$ интегралын кайталанган интегралдар аркылуу туюнткула.



26-чийме

Δ Мында биринчиден, $0 \leqslant x \leqslant a$ жана $0 \leqslant y \leqslant x$ болгондуктан

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy$$

барабардыгын алабыз. Экинчиден, $0 \leqslant y \leqslant a$ жана $y \leqslant$ $\leqslant x \leqslant a$ болгондуктан

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx$$

барабардыгына ээ болобуз. Акыркы эки барабардыктын сол жактары бирдей болгондуктан, алардын оң жактары өз ара барабар болуулары тийиш, б.а.

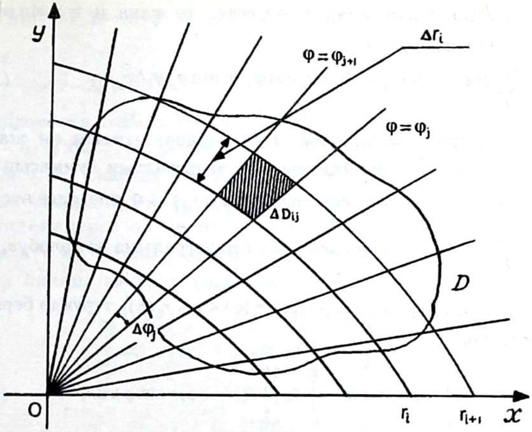
$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx$$

формуласы орун алат. Бул формула өзгөрмөнү алмаштыруудагы Дирихленин формуласы деп аталат.

§ 3. УЮЛДУК КООРДИНАТТАГЫ КОШ ИНТЕГРАЛ

Чектелген туюк квадратталуучу D областындагы интегралдануучу $f(x,y)$ функциясы берилсин. Декарттык координат системасы менен бирге уюлдук координат системасын карайлы. Ал уюлдук координат системасынын уюлу декарттык координат системасынын башталышы менен жана уюлдук ox огу менен дал келишсин.

Эми D областын уюлдан чыгуучу $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ нуру



27-чийме

(жарым түз сызыктар) жана борбору уюлда болгон $r = r_1$, r_2, …, r_n борборлош айланалар менен майда ΔD_{ij} бөлүктөргө бөлөбүз (27-чийме). Биз айлананын $r = r_i$, $r = r_{i+1}$ жаасы менен жарым түз сызыктын $\varphi = \varphi_j$, $\varphi = \varphi_{j+1}$ бөлүгү менен чектелген элементардык ΔD_{ij} областты карайлы. Ал областтын аянты болжол менен $\Delta\sigma_{ij} = r_i \Delta\varphi_j \Delta r_i$ ге барабар. Мында $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, $\Delta\varphi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$. Берилген $f(x,y)$ функциясынын D областы боюнча алынган интегралдык суммасын түзсөк, анда $\sum\limits_D f(x_i, y_i)\Delta\sigma_{ij}$ формуласына ээ болобуз. Эми биз бул суммадан уюлдук координат системасынын суммасына өтөлү. Ал үчүн x_i, y_i чекиттеринин уюлдук координаталарын r_i жана φ_j менен белгилейли жана бул чекиттер ΔD_{ij} областынан эрктүү түрдө тандалып, алар $x_i = r_i \cos\varphi_j$ ге жана $y_j = r_i \sin\varphi_j$ ге барабар болсун. Анда

$$\sum_D f(x_i,\ y_i)\Delta\sigma_{ij} = \sum_D f(r_i \cos\varphi_j, r_i \sin\varphi_j) r_i \Delta\varphi_j \Delta r_i \qquad (10)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардыктын оң жагы $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r$ функциясынын интегралдык суммасын берет. Эгерде бул суммадан $\max diam(\Delta\sigma_{ij}) \to 0$ пределге өтсөк,

анда $\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr$ кош интегралына ээ болобуз.

Эгерде $D = \{(r,\varphi): \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ \ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)\}$ түрүндө берилсе, анда биз

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \qquad (11)$$

формуласын алабыз.

7. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2) dy$ кайталанган интегралын уюлдук координаталарга өтүп, эсептегиле.

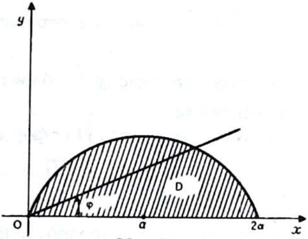
Δ Берилген мисалды чыгаруудан мурда интегралдануучу областты түзүп, анын чегинин теңдемесин жазабыз. Шарт боюнча $0 \leqslant x \leqslant 2a$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax - x^2}$ болгондуктан, областтын чегинин теңдемеси $x = 0,\ x = 2a,\ \ y = 0,\ y = \sqrt{2ax - x^2}$ сызыктары болот. Акыркы теңдеме борбору $(a,\ 0)$ чекити, радиусу $R{=}a$ га барабар болгон айлананын $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ жогорку бөлүгү (28-чийме). Областты түзгөндөн кийин $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ ни аныктап, андан кийин $x = r\cos\varphi$, $y = = r\sin\varphi$ маанилерди теңдемеге коюп,

$$r^2\sin^2\varphi = 2ar\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi$$

же

$$r(r-2a\cos\varphi)=0$$

теңдемесин алабыз. Мындан $r=0$ (уюл үчүн) жана $r=2a\cos\varphi$ (жарым айлананын калган чекиттери үчүн) теңдемелерге ээ болобуз. Анда $0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi$ өзгөрөрүн билип, төмөнкүнү алабыз:



28-чийме

$$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\cdot rdr=$$

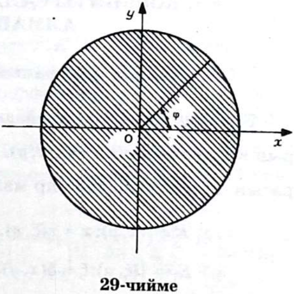
$$=4a^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{3}{4}a^4\pi. \ \blacktriangle$$

8. $\iint\limits_D\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$ интегралын $x^2+y^2\leqslant 1$ областында эсептегиле (29-чийме).

△ Интегралдоо областын түзүп, уюлдук координат системасына өтсөк, анда $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant r\leqslant 1$ пределин аныктайбыз. Анда (11) формуланын негизинде

$$\iint\limits_D\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy=$$

$$=\int_{-\pi}d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{2\pi}{5}. \ \blacktriangle$$



29-чийме

9. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ интегралын чыгарууну талап кылалы.

Мында интегралдоочу D область $x^2+y^2=a^2$ тегерек болсун деп эсептейли.

Δ Бул интегралга (11) формуланы колдонсок, анда

$$\iint\limits_D e^{-r^2}rdrd\varphi$$

кош интегралына ээ болобуз. Интегралдоочу D область тегерек болгондуктан r жана φ өзгөрмөлөрү $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ өзгөрө тургандыгын аныктай алабыз. Демек,

$$\iint\limits_D e^{-r^2}rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a re^{-r^2}dr = \int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^a d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^a\left[e^{-a^2}+1\right]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}e^{-a^2}\varphi\,\Big|_0^{2\pi} = \pi - \pi e^{-a^2} = \pi\left[1-e^{-a^2}\right]. \blacktriangle$$

Берилген интеграл, декарттык координат системасында элементардык функциялар аркылуу туюнтулбайт.

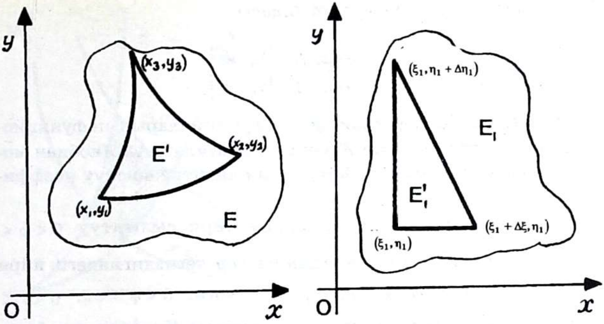
§ 4. КОШ ИНТЕГРАЛДЫН ӨЗГӨРМӨЛӨРҮН АЛМАШТЫРУУ

1. Жалпак фигуранын чоюлуу коэффициенти

Биз xoy жана $\xi 0 \eta$ тегиздигиндеги E жана E_1 фигураларын карайлы жана $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ функциялар E фигурасын E_1 фигурасына бир маанилүү чагылдырсын дейли:

$$E = \{(x,y): x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta),\ (\xi,\eta)\in E_1\};$$

$$E_1 = \{(\xi,\eta): \xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y),\ (x,y)\in E\},$$



30-чийме

мында каралган функциялардын бардыгы үзгүлтүксүз жана ар бир аргументи боюнча дифференцирленүүчү функциялар болушсун. Үч бурчтукка $E'_1 \subset E, xoy$ тегиздигиндеги ийри сызыктуу E' үч бурчтугу туура келсин. Анын чокулары төмөнкүдөй координаталарга ээ болсун:

$$x_1 = x(\xi_1, \eta_1), \qquad y_1 = y(\xi_1, \eta_1);$$
$$x_2 = x(\xi_1 + \Delta\xi, \eta_1), \qquad y_2 = y(\xi_1 + \Delta\xi, \eta_1);$$
$$x_3 = x(\xi_1, \eta_1 + \Delta\eta), \qquad y_3 = y(\xi_1, \eta_1 + \Delta\eta).$$

xoy тегиздигиндеги ийри сызыктуу E' үч бурчтугунун аянтын эсептөө максатында, функциянын өсүндүсүн белгилүү бир каталык кетирүү менен анын дифференциалы аркылуу жакындаштырып алмаштырабыз. Мындайча алмаштырууда $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ чексиз кичине чоңдуктарына салыштырганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдуктарды эске албаган болобуз. Натыйжада

$$mesE' = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}\Delta\xi \cdot \Delta\eta = \pm\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix} mesE'_1$$

барабардыгына ээ болобуз. Мындагы

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}$$

аныктагычтын $x(\xi,\eta)$ жана $y(\xi,\eta)$ функцияларынын функционалдык аныктагычы же Якобиан деп аталат. Ал Якобиан модуль боюнча алынганда, фигуранын чекитке чоюлуу коэффициентин берет.

Мисалы. $O\varphi r$ тегиздигиндеги ийри сызыктуу $0 \leqslant \varphi \leqslant \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$ трапецияны xoy тегиздигиндеги ийри сызыктуу секторго $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant r \leqslant \leqslant r(\varphi)$ формуласы аркылуу чагылдырууда Якобиан r ге барабар болот.

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

2. Кош интегралдын өзгөрмөлөрүн алмаштыруу

Теорема. *Эгерде:* **1.** E_1 *көптүгүн* E *көптүгүнө өз ара бир маанилүү чагылдыруу* $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ *үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялар аркылуу берилсе,*

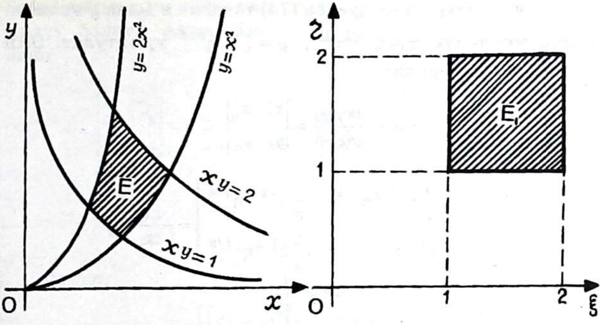
2. *Ал функциялар ар бир аргументтер боюнча үзгүлтүксүз биринчи тартиптеги айрым туундуларга ээ болсо,*

3. E_1 *бардык чекиттеринде Якобиан* $J = \dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \neq 0$ *болсо,*

4. $f(x,y)$ *функциясы* E *көптүгүндө интегралдануучу болсо, анда*

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{E_1} f\big(x(\xi,\eta),\ \ y(\xi,\eta)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta \qquad (12)$$

формуласы орун алат.



31-чийме

Эгерде уюлдук координат системасында карасак, анда биз алдыңкы параграфта алынган жөнөкөй

$$\iint\limits_{E} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{E_1} f\left(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\right) r d\varphi dr \qquad (13)$$

формуласына ээ болобуз.

Мисалдар: 10. $\iint\limits_{E} y^3 dxdy$ интегралын E көптүгү $y = x^2$, $y = 2x^2$ параболасы жана $xy=1$, $xy=2$ (31-чийме) гиперболасы менен чектелген учурда эсептегиле.

Δ Бул интегралды (12) формула аркылуу эсептөө үчүн $x \geqslant 0$ маанисинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү

$$\xi = \frac{y}{x^2}, \qquad \eta = xy \qquad (14)$$

чагылдыруусун карайбыз.

Бул (14) чагылдыруу E көптүгүн $E_1 = \{(\xi,\eta) : 1 \leqslant \xi \leqslant 2,\ 1 \leqslant \eta \leqslant 2\}$ төрт бурчтугуна чагылдырат жана чагылдыруу өз ара бир маанилүү. Ошондуктан (14) теңдеме x жана y ке карата бир маанилүү $x=\xi^{-1/3}\eta^{1/3}$, $y=\xi^{1/3}\eta^{2/3}$ туюнтулат. Эми Якобианды эсептейли:

$$J=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta \\ y'_\xi & y'_\eta \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\xi^{-4/3}\eta^{1/3} & \frac{1}{3}\xi^{-2/3}\eta^{2/3} \\ \frac{1}{3}\xi^{1/3}\eta^{-2/3} & \frac{2}{3}\xi^{1/3}\eta^{-1/3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3\xi},$$

$$|J|=\frac{1}{3|\xi|}.$$

Ал эми $y^3=\xi\eta^2$ болгондуктан, берилген интегралга (14) алмаштыруусун колдонсок, анда

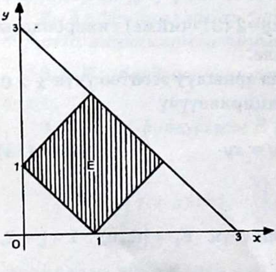
$$\iint\limits_E y^3dxdy=\iint\limits_{E_1}\xi\eta^2|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta=\frac{1}{3}\iint\limits_{E_1}\eta^2 d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 d\xi\int\limits_1^2 r^2 d\eta=\frac{1}{3}\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{9}.\ \blacktriangle$$

11. Эгерде D областы $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ сызыктары менен чектелген квадрат болсо,

$$\iint\limits_E (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$$

интегралын эсептегиле (32-чийме).



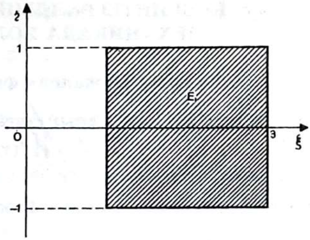
32-чийме

Δ Жогоркудай эле, $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ чагылдыруусун карасак, анда $x=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $y=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$

болуп чагылдыруу бир маанилүү болот. Анда Якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$|J| = \frac{1}{2}.$$



33-чийме

Демек,

$$\iint_E (x+y)^3 (x-y)^2 \, dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{E_1} \xi^3 \eta^2 d\xi d\eta.$$

Ал эми E_1 квадрат болгондуктан (33-чийме),

$$\frac{1}{2} \iint_{E_1} \xi^3 \eta^2 d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \xi^3 d\xi \int_{-1}^1 \eta^2 d\eta = \frac{1}{2} \int_1^3 \xi^3 \left[\frac{1}{3}\eta^3\right]_{-1}^1 d\xi =$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^3 \xi^3 (1+1) d\xi = \frac{1}{12} \xi^4 \Big|_1^3 = \frac{20}{3}. \ \blacktriangle$$

§ 5. КОШ ИНТЕГРАЛДЫН ГЕОМЕТРИЯДА ЖАНА МЕХАНИКАДА КОЛДОНУЛУШТАРЫ

1. Тегиздиктеги жалпак фигуранын аянтын эсептөө

Эгерде, жогоруда аныкталган

$$J = \iint_D f(x, y)dxdy$$

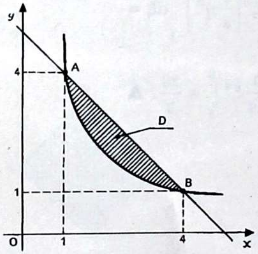
кош интегралында $f(x, y) \equiv 1$ болсо, анда $\iint_D dxdy$ кош интегралынын сандык мааниси D областынын аянтын берет. Ошондуктан D областынын аянтын кош интеграл аркылуу

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \quad \text{же} \quad S = \int_\alpha^\beta dy \int_{\xi(y)}^{\eta(y)} dx \qquad (15)$$

формулалары аркылуу аныктоого болот.

Мисалдар: 12. Биз, $xy = 4$ жана $x + y = 5$ сызыктары аркылуу чектелген D областынын аянтын эсептейли.

Δ 1) Берилген D областын түзүп (34-чийме), A жана B чекиттеринин координаталарын аныктайлы. Ал үчүн ийри сызыктардын теңдемелерин система түрүндө эсептеп, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ маанилерин алабыз. Анда $A(1, 4)$, $B(4, 1)$ координаталарга ээ болот.



34-чийме

2) Эми (15) формуланы колдонобуз:

$$S = \iint_D dxdy = \int_1^4 dx \int_{4/x}^{5-x} dy =$$

$$= \int_1^4 y \Big|_{4/y}^{5-x} dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx =$$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{15}{2} - 4\ln 4 \text{ (кв. бирд.)} \blacktriangle$$

2. Көлөмдү эсептөө

Кош интегралды эсептөөдө § 2 де

$$V=\int_{\alpha}^{\beta} dy\int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)dx \quad \text{жана} \quad V=\int_{\alpha}^{\beta} dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (16)$$

фомулаларын алдык. Ушул формулалардын колдонулуштарына токтололу.

13. Цилиндрлер $x^2+y^2=16$, $x^2+z^2=16$ жана координаталар тегиздиктери $x=0$, $y=0$, $z=0$ менен чектелген нерсенин көлөмүн аныктагыла.

Δ 1) Цилиндрлердин кесилүү сызыктарын аныктайбыз (35-чийме). Ал үчүн *xoy* жана *yoz* тегиздиктерине айланалардын багыттарын түзсөк, алар айланалардын чекиттерин берет.

2) Чиймени элестеткенден кийин эки цилиндр менен чектелген көлөмдү (биринчи октанттагы бөлүгүн) (16) формула аркылуу аныктоого болот:

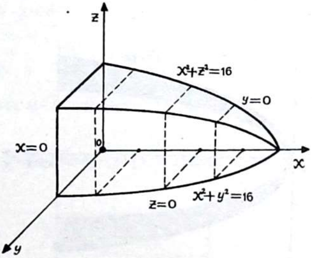
$$V=\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\sqrt{16-x^2dy}=\int_0^4\left(16-x^2\right)dx=\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)_0^4=128/3.$$

3) Демек, 128/3 (куб.бирд.). ▲

14. Параболоид $y^2+z^2=$ $=4x$ параболалык цилиндр $y^2=x$ жана $x=3$ тегиздиги менен чектелген нерсенин көлөмүн аныктагыла.

Δ 1) Интегралдоо областынын *xoy* тегиздигине сүрөттөлүшүн түзсөк, 36-чиймеге ээ болобуз.

2) Изделген көлөм бардык көлөмдүн төрттөн бирин түзөт, б.а.



35-чийме

$$\frac{1}{4}V=\int_0^3 dx\int_{\sqrt{4}}^{2\sqrt{x}}\sqrt{4x-y^2dy}=\int_0^3\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x-y^2}+\frac{4x}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{x}}\right]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}=$$

$$=\int_0^3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2x\cdot\frac{\pi}{2}-2x\cdot\frac{\pi}{6}\right]dx=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\pi\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\frac{3}{4}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right).$$

Демек, $V=\frac{3}{4}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$. ▲

3. Уюлдук координат системасындагы кош интегралдын колдонулуштары

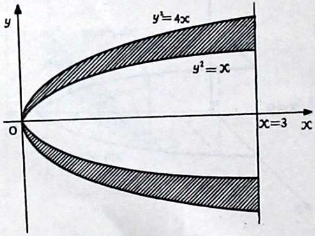
Жогорудагы § 3төгү алынган

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr \qquad (17)$$

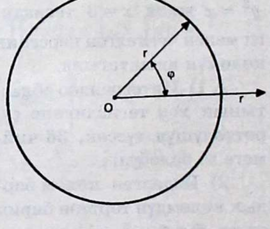
же, ушунун эле өзү § 4тө алынган

$$\iint_E f(x,y)dxdy=\iint_{E_1} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rd\varphi dr \qquad (18)$$

формулалардын колдонулуштарына токтололу.



36-чийме



37-чийме

Мында, биз эки учурду карашыбыз керек:

1) Эгерде ийри сызык (контур) координат башталмасын өз ичине алса, б.а. уюл ийри сызыктын ичинде жатса (37-чийме), анда $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ жана $0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$ өзгөрөт. Бул учурда биз:

а) Көлөмдү эсептөө үчүн

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr;$$

б) Жалпак фигуранын аянтын эсептөө үчүн

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr$$

формулаларга ээ болобуз.

2) Эгерде координат башталмасы ийри сызыктын сыртында жатса (19-чийме), анда:

а) Көлөмдү эсептөө үчүн

$$V = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr; \tag{19}$$

б) Жалпак фигуранын аянтын эсептөө үчүн

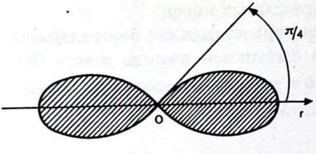
$$S = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \tag{20}$$

формулаларын колдонуу керек.

15. $r^2 = \cos 2\varphi$ ийри сызыгы менен чектелген аянтты эсептегиле.

Δ Ийри сызыкты, б.а. D областын түзүү максатында төмөнкү таблицаны түзөбүз.

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$
r	± 1	$\pm 0{,}8$	0



38-чийме

Ийри сызык координат башталмасын өз ичине алат жана симметриялуу (38-чийме). Ошондуктан (18) формуланын негизинде

$$\frac{1}{4}S = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} rdr =$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr = \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4};$$

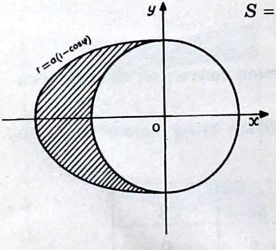
$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{4}$$

$S = 1$ (кв.бирд.). ▲

16. Кардиоида $r = a(1 - \cos\varphi)$ жана $r = a$ тегереги менен чектелген, тегеректин сыртындагы бөлүгүнүн аянтын эсептегиле.

Изделген аянт 39-чиймеде штрихтелип көрсөтүлгөн. Координат башталмасы ийри сызыктардын сыртында, ошондуктан (20) формуланы колдонобуз.

$$S = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_a^{a(1-\cos\varphi)} rdr = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} r^2/_2 \Bigg|_a^{a\sqrt{1-\cos\varphi}} d\varphi =$$



39-чийме

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{a^2}{2}(\cos^2\varphi - 2\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi - a^2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}(8 - \pi) \text{ (кв.бирд.). } \blacktriangle$$

17. Ийри $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$ сызык менен чектелген аянтты аныктагыла.

Δ Берилген ийри сызыктын уюлдук координат системасындагы теңдемесин жазалы, ал үчүн $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ болсо, $(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = 2r^3\cos^3\varphi$ же $r = 2\cos^3\varphi$ теңдемесин алабыз. Алынган теңдеменин графигин түзүү үчүн төмөнкү таблицаны түзөлү:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
r	2	0,71	0

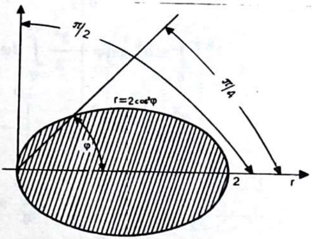
40-чиймени эске алып, (18) формуланы колдонсок, анда

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos^3\varphi} r\,dr = 2\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos^3\varphi} d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + 3\cos^2 2\varphi + 3\cos 2\varphi + \cos^3 2\varphi)\, d\varphi =$$

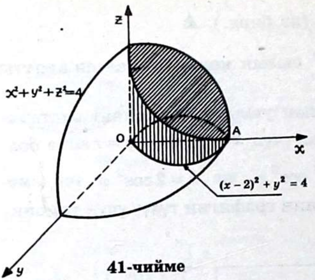
$$= \frac{1}{2}\Bigg[3\varphi + \frac{3}{8}\sin 4\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi -$$

$$- \frac{\sin^3 2\varphi}{6}\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4} \text{ (кв. бирд.).} \blacktriangle$$



40-чийме

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ шарын координат башталмасынан $x^2 + y^2 = 2x$ цилиндри кесип өтөт. Пайда болгон көлөмдү аныктагыла.



41-чийме

Δ Изделген көлөмдү түзөлү. Шардын теңдемесинен $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}$ теңдемесин алсак болот. 41-чиймеден көрүнүп тургандай, ал фигура xoy жана xoz тегиздиктерине симметриялуу. Ошондуктан, биз интегралдоо D областы, OA жарым тегереги болгон изделген көлөмдүн төрттөн бир бөлүгүнүн формуласын жаза алабыз. Бул тегеректе $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $r = 2\cos\varphi$ ($x^2+y^2=2x$ теңдемеден уюлдук координат системасына өткөндө) болот. Ушундан кийин

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4-r^2}\, rdr = -\int_0^{\pi/2} \frac{(4-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left(4-r^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(4-4\cos^2\varphi)^{3/2} - 4^{3/2}\right]d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 4^{3/2}\int_0^{\pi/2}(\sin^2\varphi)^{3/2}\,d\varphi + \frac{4}{3}^{3/2}\int_0^{\pi/2} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 4^{3/2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi + \frac{2^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi = -\frac{2^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi +$$

$$+\frac{2^3}{3}\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2^3}{3}\cos\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{2^3}{3}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{2^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

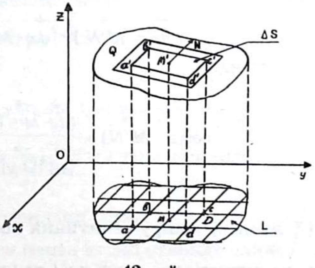
$$= -\frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{9} + \frac{2^3}{6}\pi = \frac{2^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right);$$

$$V = \frac{2^5}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \text{ (куб. бирд.).} \blacktriangle$$

4. Беттин аянты

Бизге $z = f(x, y)$ теңдемеси аркылуу кандайдыр бир бет берилсин. Бул беттен T контуру менен чектелген бөлүгүн бөлүп алабыз. Ал эми T контурунун xoy тегиздигиндеги L проекциясы D областын чектесин (42-чийме). Каралган D областын бардык чекиттери үчүн, б.а. бардык x жана y маанилеринде z бир маанилүү аныкталып жана үзгүлтүксүз $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ айрым туундуларга ээ болсун. Бул болсо бөлүнүп алынган T контуру менен чектелген беттин бөлүгү, ар бир чекитинде аныкталган жаныма тегиздикке ээ жана ал тегиздик өзүнүн абалын беттин чекитинен чекитине өткөндө үзгүлтүксүз өзгөртөт. Эми D областын координат окторго жарыш түз сызыктар аркылуу элементардык бөлүктөргө бөлөлү да бир гана $aвcd$ элементардык бөлүгүн карайлы. Бул бөлүктүн ичинен же анын контурунан (каалаган жерибизден) $M(\xi, \eta)$ чекитин алып, ал чекитке xoy тегиздигине перпендикуляр тургузабыз жана ал перпендикулярга, бетте, M' чекити туура келсин. Ушул чекит аркылуу бетке Q жаныма тегиздигин жүргүзөбүз. Негизи $aвcd$ элементтери болгон тик бурчтуу призма (кыры oz огуна жарыш) түзсөк, ал жаныма тегиздикти $a'b'c'd'$ төрт бурчтугу боюнча кесет. Ал төрт бурчтуктун аянты Δs болсун. D областынын бардык бөлүнгөн элементтерин ушул сыяктуу иштеп, алардын аянттарынан сумма түзөбүз:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .$$



42-чийме

Эгерде $d(\Delta s_i) = \max\limits_{1<i<n} diam \Delta s_i \to 0$, алдыңкы сумма чектелген s пределге ээ болсо, анда ал предел беттин T контуру менен чектелген бөлүгүнүн аянтын берет

$$s = \lim_{d(\Delta s_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i. \qquad (21)$$

Ушул аныкталган аянтты кош интеграл аркылуу туюнталы. Чиймеден көрүнгөндөй $\Delta\omega$ аянтчасы xoy тегиздигиндеги Δs аянтчасынын проекциясы. Ошондуктан

$$\Delta\omega = \Delta s \cos\alpha, \qquad (22)$$

мында α — бурчу Q — жануу тегиздиги менен xoy тегиздиги аркылуу түзүлгөн. Бул бурчтун ордуна, беттин M' чекитине түшүрүлгөн $\overrightarrow{M'N}$ нормалы менен oz огунун арасындагы бурчту да алууга болот. Ушул бурчту аныктайлы. Ал үчүн, $z = f(x, y)$ теңдемеси аркылуу берилген беттин нормалы $\overrightarrow{M'N}$ векторун анын проекциясы

$$\overrightarrow{M'N} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$$

аркылуу туюнтсак, анда $\overrightarrow{dz}$ вектору $\overrightarrow{dz} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$ түрүндө жазылат. Бул убакта, алардын скалярдык көбөйтүндүсү

$$(\overrightarrow{dz} = \overrightarrow{M'N}) = |\overrightarrow{dz}|\cdot|\overrightarrow{M'N}|\cos(\vec{z}\,\hat{}\,\overrightarrow{M'N}).$$

Мында

$$\cos(\vec{z}\,\hat{}\,\overrightarrow{M'N}) = \frac{(\overrightarrow{dz}\cdot\overrightarrow{M'N})}{|\overrightarrow{dz}|\cdot|\overrightarrow{M'N}|} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\Bigg|\begin{matrix} x=\xi \\ y=\eta \end{matrix},$$

(ξ жана η жануу чекитинин координаты, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ айрым туундулар $z = f(x,y)$ теңдемесинен аныкталат) же (21) формуланы колдонсок, $\Delta\omega_1 = \left.\dfrac{\Delta s_i}{\sqrt{1+\rho^2+q^2}}\right|_{\substack{x=\xi_i\\ y=\eta_i}}$ формуласын

алабыз. Ал эми мындан

$$\Delta s_i = \sqrt{1+p^2+q^2}\Big|_{\substack{x=\xi_i\\ y=\eta_i}} \Delta v_i \tag{23}$$

формуласы келип чыгат. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\Delta\omega_i\Big|_{\substack{x=\xi_i\\ y=\eta_i}} \tag{24}$$

түрүндө жазылат, анда ал $\sqrt{1+p^2+q^2}$ функциясынын интегралдык суммасын берет жана бул сумма анык пределге ээ, анткени p жана q функциялары шарт боюнча үзгүлтүксүз. Ошентип,

$$S = \lim_{d(\Delta s_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\Delta\omega_i\Big|_{\substack{x=\xi_i\\ y=\eta_i}} = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

же

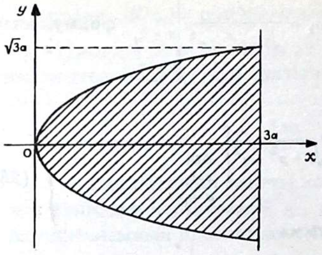
$$S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy, \tag{25}$$

ал эми уюлдук координат системасында

$$S = \iint_\Delta \sqrt{1+p^2+q^2}\,r^2 dr d\varphi \tag{26}$$

формуласына ээ болобуз. Акыркы формулада $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ айрым туундуларында $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ алмаштыруусун колдонуу керек.

19. $y^2 + z^2 = 4ax$ параболоиддин бетин $y^2 = ax$ цилиндри жана $x = 3a$ $(a > 0)$ тегиздиги менен кесип өткөндө пайда болгон бөлүктүн бетинин аянтын аныктагыла.



43-чийме

Δ Интегралдоо области үчүн $y^2 = ax$ параболасы жана $x = 3a$ түз сызыктары менен гана чектелсин (43-чийме). Изделген беттин аянтын (25) формула аркылуу эсептейбиз. Берилген нерсе *xoy* жана *xoz* тегиздиктерине симметриялуу болгондуктан ал аянттын биринчи октантка тиешелүү болгон төрттөн бир чейрегин аныктап, келип чыккан жыйынтыкты төрткө көбөйтөбүз. Ошентип,

$$0 \leqslant x \leqslant 3a;\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax}$$

пределдерин аныктап, параболоиддин $z = \sqrt{4ax - y^2}$ тендемесинен

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4a}{2\sqrt{4ax - y^2}} = \frac{2a}{\sqrt{4ax - y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4ax - y^2}}$$

айрым туундуларды аныктасак, анда

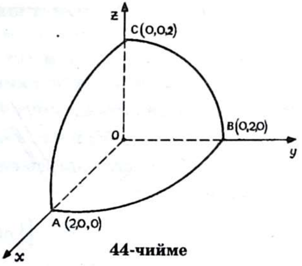
$$\frac{S}{4} = \int_0^{3a} dx \int_0^{\sqrt{ax}} \sqrt{1 + \frac{4a^2}{4ax - y^2} + \frac{y^2}{4ax - y^2}}\,dy = 2\int_0^{3a} \sqrt{ax + a^2}\,dx \int_0^{\sqrt{ax}} \frac{dy}{\sqrt{4ax - y^2}} =$$

$$= 2\int_0^{3a} \sqrt{ax^2 + a^2}\, azc\sin \frac{y}{2\sqrt{ax}} \Bigg|_0^{\sqrt{ax}} dx = 2\int_0^{3a} \sqrt{ax + a^2}\, azc\sin \frac{1}{2}\, dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{6} \int_0^{3a} \sqrt{ax + a^2}\, dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(ax + a^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}a} = \frac{2\pi}{9a}\left(8a^3 - a^3\right) = \frac{14a^2\pi}{9},$$

$$S = \frac{56}{9}\pi a^2 \text{ (кв. бирд.).} \blacktriangle$$

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ шардын бетин аныктагыла.



44-чийме

Δ Издеген беттин сегизден бир бөлүгү болгон ABCнын аянтын аныктайлы (44-чийме).

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\ ;$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{4}{4 - x^2 - y^2},$$

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z^2 = 4 - x^2 - y^2\right).$$

Чыгаруучу аянттын xoy тегиздигиндеги проекциясы AoB аянты жана ал x=0, y=0 жана $x^2 + y^2 = 4$ сызыктары менен чектелген. Анда $0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$ пределин аныктап, формула аркылуу эсептейли:

$$S = 8\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} =$$

$$= 8\int_0^2 2\arcsin\frac{y}{\sqrt{4 - x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= 16\int_0^2 \arcsin\frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx = 16\int_0^2 \frac{\pi}{2}\,dx = 8\pi x\Big|_0^2 = 16\pi,$$

$$S = 16\pi \text{ (кв. бирд.).}$$ ▲

5. Пластинанын массасы

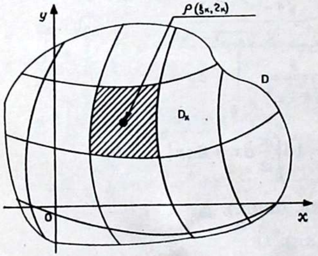
Берилген D область массага ээ болуучу чекиттердин көптүгүнөн түзүлсүн жана биз аны пластина деп атайлы. Эгерде массанын жайланыштыруу тыгыздыгы үзгүлтүксүз $\rho(x,y)$ функция аркылуу берилсе, анда пластинанын массасын табуу маселеси $\rho(x,y)$ функциясынан D областы боюнча алынуучу кош интегралды

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy \qquad (27)$$

эсептөөгө алып келет. Бул маселени чечүү үчүн D областын өз эркибизче n бөлүкчөлөргө бөлүп, ар бир бөлүкчөлөрдүн аянтчаларын $\Delta\sigma_k$, $k=\overline{1,n}$ менен белгилейбиз (45-чийме). Анда D_k, $\left(k=\overline{1,n}\right)$ бөлүкчөнүн массасы болжолдуу түрдө $\rho(\xi_k,\eta_k)\times$ $\times\,\Delta\sigma_k$ га барабар, ал эми бардык пластинанын массасы болжолдуу түрдө

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta\sigma_k$$

суммасына барабар болот. Бул сумманын $\max\limits_{1<k<n}(\Delta\sigma_k)\to 0$ предели (27) формуланы берет.



45-чийме

6. Пластинанын статикалык моменти жана оордук борборунун координаталары

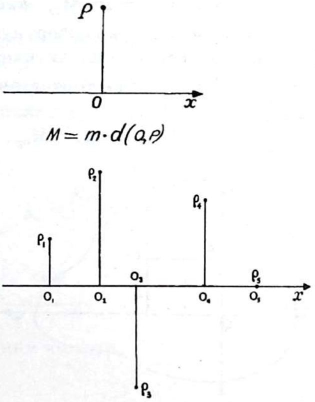
Материалдык m массалуу чекиттин окко карата статикалык моменти, чекиттин массасынын чекиттен окко чейинки аралыкка болгон көбөйтүндүсүнө барабар.

Бир тегиздикте жатышкан чектүү сандагы материалдык P_k, $k=\overline{1,n}$ чекиттердин системасынын окко карата статикалык моменти, ал чекиттердин массасы менен окко чейинки аралыктын көбөйтүндүсүнүн суммасына барабар, бирок октун бир жагындагы аралыкты оң белги менен алсак, экинчи жагындагы аралыкты терс белги менен алабыз (46-чийме).

$$M = m_1 d(0_1, P_1) + m_2 d(0_2, P_2) -$$
$$- m_3 d(0_3, P_3) + m_4 d(0, P_4) + m_5 \cdot 0,$$

мында m_k болсо, P_k чекитинин массасы, $k=\overline{1,5}$.

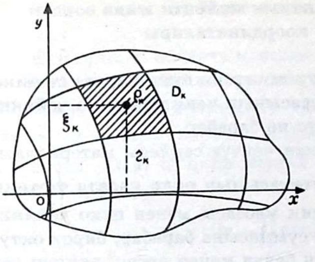
Эми массаны бөлүштүрүү тыгыздыгы үзгүлтүксүз $\rho(x,y)$ функциясы аркылуу берилген D материалдык пластинанын координат окторго карата статикалык моменттерин кош интеграл аркылуу эсептөө менен аныкталат (47-чийме).



46-чийме

Чындыгында эле D ны $D_k, k=\overline{1,n}$ бөлүкчөлөргө бөлүп, ар бир бөлүктүн аянтчаларын $\Delta\sigma_k$ менен белгилесек жана ал бөлүктүн массасы $P_k(\xi_k, \eta_k)$ чекитине топтолгон деп болжолдосок, анда D_k бөлүктүн массасы

$$\rho(\xi_n, \eta_k)\cdot\Delta\sigma_k, \ k=\overline{1,n}$$



47-чийме

көбөйтүндүсүнө барабар болот. Анда бардык пластинанын *ox* жана *oy* октoруна карата статикалык моменти

$$M_{ox} \approx \sum_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_n, \eta_k) \cdot \Delta\sigma_k,$$

$$M_{oy} \approx \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta\sigma_k$$

суммалары менен аныкталат жана мындан $\max\limits_{1<k<n}(\Delta\sigma_k) \to 0$ пределин алсак, анда

$$M_{ox} = \iint\limits_D y\rho(x, y)d\sigma, \quad M_{oy} = \iint\limits_D x\rho(x, y)d\sigma \tag{28}$$

формулаларын алабыз.

Ушул аныкталган M_{ox} жана M_{oy} статикалык моменттер пластинанын оордук борборунун координаталарын аныктоого чоң жардам берет. Атап айтканда, эгерде пластинанын массасы $C(x_c, y_c)$ чекитине топтолгон деп болжолдосок (48-чийме), анда

$$mx_c = M_{oy}, \quad my_c = M_{ox}$$

келип чыгат.

48-чийме

Мындан

$$x_c = \frac{M_{oy}}{m} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y)d\sigma},$$

$$y_c = \frac{M_{ox}}{m} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y)d\sigma}, \tag{29}$$

формулаларына ээ болобуз. Эгерде D пластина бир тектүү, б.а. $\rho(x,y)-const$ болсо, анда

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xd\sigma}{S},\quad y_c=\frac{\iint\limits_D yd\sigma}{S} \tag{29a}$$

жөнөкөй формулаларын алабыз, мында S — болсо, D пластинасынын аянты.

Эгерде биз мейкиндиктеги бир тектүү цилиндрдик нерсени карасак (§1, п.2. 4-а чийме), анда ал цилиндрдик нерсенин координат тегиздиктерге карата статикалык моменттери $(\rho(x,y,z)\equiv 1)$,

$$M_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_D z^2dxdy,\qquad M_{xz}=\iint\limits_{D_1} yzdxdz,$$

$$M_{yz}=\iint\limits_{D_2} xzdzdy \tag{30}$$

формулалары аркылуу туюнтуларын көрсөтүүгө болот.

Координаталар тегиздиктерине карата статикалык моменттер белгилүү болгон соң, бир тектүү цилиндрдик нерсенин оордук борборунун координаталарын оңой эле эсептөөгө болот:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{V}=\frac{\iint\limits_D xzdzdy}{V},\quad y_c=\frac{M_{yz}}{V}=\frac{\iint\limits_D zydzdx}{V},$$

$$z_c=\frac{M_{xy}}{V}=\frac{\frac{1}{2}\iint\limits_D z^2dxdy}{V}, \tag{31}$$

мында V — цилиндрдик нерсенин көлөмү.

7. Пластинанын инерция моменти

Материалдык m массалуу чекиттин окко карата инерция моменти деп, ал чекиттин массасы менен чекиттен окко чейинки аралыктын квадратына болгон көбөйтүндүсүн айтабыз. Ал эми бир тегиздикте жаткан материалдык чекиттердин системасынын инерция моменти ал системаны түзгөн чекиттердин инерция моменттеринин суммасына барабар (49-чийме):

$$J = \sum_{k=1}^{s} m_k d^2(O_k, P_k).$$

Эми биз материалдык D пластинанын ox, oy окторуна карата жана координат O (0, 0) башталмасына карата инерция моментин кош интеграл аркылуу аныктайлы. Ал үчүн D ны D_k, $k = \overline{1, n}$ бөлүкчөлөргө бөлүп, аянтчаларын $\Delta\sigma_k$, $k = \overline{1, n}$ менен белгилейли. Ушул D пластинасында массалардын жыйналыштыруу тыгыздыгы үзгүлтүксүз $\rho(x, y)$ функциясы аркылуу берилди деп эсептесек, анда k — бөлүкчөнүн массасы $m_k = \rho(\xi_k, \eta_k,) \cdot \Delta\sigma_k$ болот да бардык пластинанын момент инерциясы болжолдуу түрдө

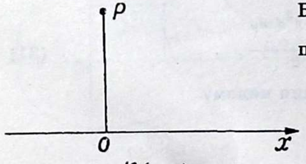
$$J_{ox} \approx \sum_{k=1}^{n} \eta^2 \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta\sigma_k, \quad J_{oy} \approx \sum_{k=1}^{n'} \xi^2 \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta\sigma_k,$$

$$J_o \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\xi^2 + \eta^2\right) \rho\left(\xi_k, \eta_k\right) \cdot \Delta\sigma_k$$

суммалары аркылуу аныкталат. Бул суммаларга $\max\limits_{1<k<n}(\Delta\sigma_k) \to 0$ пределге өтсөк, анда

$$J_{ox} = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma,$$

$$J_{oy} = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma, \tag{32}$$

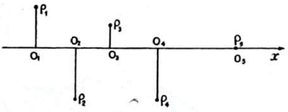


$J = md^2(0, P)$

$$J_o = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)\,d\sigma$$

формулаларына ээ болобуз.

Жогоркудай эле D пластинасы бир тектүү болсо, анда (32) формула өтө жөнөкөй түргө келери көрүнүп турат.



49-чийме

Эгерде мейкиндикте цилиндрдик нерсени карасак, анда ал цилиндрдик нерсенин oz огуна карата инерция моменти

$$J_z = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) z\,d\sigma, \tag{33}$$

ал эми yoz жана xoz тегиздиктерине карата инерция моменттери

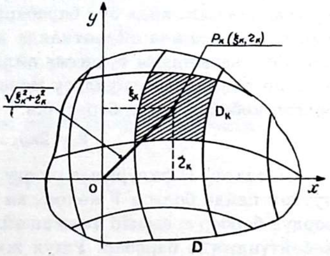
$$J_{xz} = \iint_D y^2 z\,d\sigma, \quad J_{yz} = \iint_D x^2 z\,d\sigma \tag{34}$$

формулалары аркылуу аныкталарын көрсөтүүгө болот. Ушул (34) формуладан

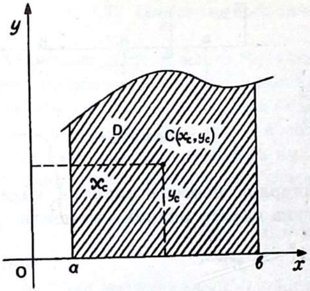
$$J_z = J_{xz} + J_{yz}$$

болору көрүнүп турат. Бул учурда цилиндрдик нерсе бир тектүү деп эсептелди.

Мисал: D пластинасы, $y=f(x)$ ийри сызыгы, oz огунун кесиндиси жана эки $x = a$, $x = b$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециясы болсун. Массанын жайланыштыруу тыгыздыгы бирге барабар ($\rho(x, y) = 1$). Координат окторго карата статикалык моменттерин жана оордук борборунун координаталарын аныктагыла (51-чийме).



50-чийме



51-чийме

$$M_{ox} = \iint_{y} dxdy = \int_a^b dx \int_a^{f(x)} ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx;$$

$$M_{oy} = \iint_{D} xdxdy = \int_a^b xdx \int_0^{f'(x)} dy =$$

$$= \int_a^b xf(x)dx;$$

$$m = \iint_{D} dxdy = \int_a^b f(x)dx;$$

$$x_c = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}; \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Эгерде акыркы формуланы

$$2\pi y_c \int_a^b f(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

түрүндө жазсак, анда бул барабардыктын оң жагы D фигурасын ox огу боюнча айлантканда пайда болгон V көлөмдү берет. Сол жагындагы туюнтма айландырууда C чекити сызып чыккан айлананын узундугу менен D фигурасынын аянтына болгон көбөйтүндүсүн берет, б.а.

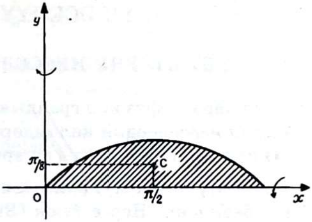
$$V = 2\pi y_c \cdot S.$$

Ошентип, D фигурасын ox огу боюнча айлантканда, айлануудан пайда болгон V көлөм, ал фигуранын S аянты менен оордук борбор c, сызып чыккан айлананын узундугуна болгон көбөйтүндүсүнө барабар. Ушул жыйынтык катарында кабыл алынган теорема Гульдиндин теоремасы деп аталат. ▲

Мисалы. $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ сызыгын айландырууда пайда болгон бет менен чектелген нерсенин көлөмүн аныктагыла, эгерде:

а) ox огу боюнча айлантылса;

б) oy огу боюнча айлантылса;



52-чийме

Δ $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ жана $y = 0$ сызыктары менен чектелген аянт,

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

Ал эми бул фигура $x = = \pi/2$ түз сызыгына симметриялуу болгондуктан, оордук борбору ошол $x = \pi/2$ түз сызыгында жатат, анда

$$M_{ox} = \iint_D ydxdy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} ydy = \frac{\pi}{4}; \ y_c = \frac{\pi}{8}.$$

а) Гульдиндин теоремасын колдонуп, нерсенин көлөмүн аныктайбыз (52-чийме):

$$2\pi \cdot \frac{\pi}{8} = V, \ V = \frac{\pi^2}{2}.$$

б) Ошол эле фигураны oy огу боюнча айлантканда пайда болгон көлөм

$$2\pi x_c \cdot S = V, \ x_c = \pi/2.$$

мындан

$$V = 2\pi^2.$$

II. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛ

§ 1. КУБТАЛУУЧУ НЕРСЕЛЕР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Бул параграфта көп грандыктардын көлөмдөрүнө таянып, каалаган нерселердин көлөмдөрүнө аныктама берели.

Ошентип, бизге каалаган эрктүү формадагы (V) нерсе б.а. үч өлчөмдүү R^3 мейкиндиктеги, чектелген туюк область түрүндө берилсин. Нерсе туюк (S) бет (же бир нече бет) менен курчалсын. Эми биз (V) нерсенин ичинде жаткан (X) көп грандыктарынын көптүгүн жана нерсени өз ичине алган $(У)$ көп грандыктарынын көптүгүн карайлы да биринчисинин көлөмүн X, экинчисиникин $У$ менен белгилейли. Анда X көптүгү үчүн накта жогорку V_* чеги, ал эми $У$ көптүгү үчүн накта V^* төмөнкү чеги дайыма аныкталып, $V_* \leqslant V^*$ касиет орун алат. Мында V_* нерсенин ички көлөмү, V^* сырткы көлөмү деп атайбыз.

Эгерде эки чеги $V_* = \sup\{X\}$ жана $V^* = \inf\{J\}$ дал келсе $V_* = V^*$, анда (V) нерсесин кубталуучу (көлөмгө ээ болуучу) нерсе деп атайбыз жана анын көлөмүн V менен белгилейбиз.

Кубталуучу нерселерде төмөнкү негизги критерийлер орун алат:

1⁰. (V) нерсеси кубталуучу болуш үчүн ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн кубталуучу эки (X) жана $(У)$ көп грандыктар аныкталып, алардын көлөмдөрүнө $Y - X < \varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү;

2⁰. (V) нерсеси кубталуучу болуш үчүн ал курчалган чеги кубталуучу болуп жана нөл көлөмгө ээ болсо;

3⁰. Эки кубталуучу нерсенин биригүүсү, кесилиши жана айырмасы да кубталуучу болот.

Ошентип: а) Эгерде (X) жана $(У)$ кубталуучу көп грандуу нерселер болсо жана $(X) \subset (У)$, анда $X \leqslant У$ аткарылат (көлөм монотондуулук касиетке ээ),

б) Эгерде (X) жана $(У)$ кубталуучу жалпы ички чекитке ээ болбогон көп грандуу нерселер болсо, анда $V = X + Y$ (көлөм аддитивдик касиетке ээ).

в) Эгерде кубталуучу (X) жана ($У$) көп грандыктары өз ара барабар болушса, анда $X = У$ (көлөм инварианттык касиетке ээ болот).

Мисалы: 1. Тик бурчтуу параллелепипед $[a_1, a_2]\times[b_1, b_2]\times$ $\times[c_1, c_2]$ кубталуучу болот жана көлөмү $V = [a_2 - a_1]\times[b_2 - b_1]\times$ $\times[c_2 - c_1]$ ге барабар.

2. Ар кандай жогору жагынан $z = f(x, y)$ бети менен чектелген ($f(x, y)$) — үзгүлтүксүз функция) ар бири квадратталуучу негизге ээ болуучу чектелген сандагы ийри сызыктуу цилиндрлер кубталуучу болот жана алардын көлөмү $V =$ $= \iint\limits_D f(x, y)dxdy$ кош интегралы аркылуу аныкталат.

§ 2. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДЫН АНЫКТАМАСЫ

Кубталуучу чектелген туюк R^3 мейкиндигиндеги V областында* чектелген $f(M) = f(x, y, z)$ функциясы берилсин. V областын n майда $V_i (i = 1, \ldots, n)$ областтарга бөлөбүз. Ар бир майда V_i кубталуучу элементардык бөлүкчөлөрдүн көлөмдөрүн Δv_i менен белгилеп жана ар бир V_i бөлүкчөлөрдөн $M_i(x_i, y_i, z_i)$ чекиттерин тандап алабыз да бардык бөлүкчөлөр боюнча сумма түзөбүз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i. \qquad (1)$$

---

* Мындан ары область деген түшүнүктү кубталуучу нерсе деп түшүнөбүз.

Бул сумманы $f(x,y,z)$ функциясынын V областы боюнча түзүлгөн интегралдык суммасы деп айтабыз.

Аныктама. *Эгерде* $\rho = \max\limits_{i} diam\{\Delta v_i\} \to 0$ *да (1) интегралдык сумма, V областын элементардык n бөлүкчөлөргө кандайча бөлүүдөн жана ар бир* V_i *бөлүкчөлөрдөн* $M_i(x_i, y_i, z_i)$ *чекитин тандап алуудан көз каранды болбостон бир гана чектелген J пределине ээ болсо, анда ал пределди* $f(x,y,z)$ *функциясынын V областы боюнча алынуучу үч эселүү интегралы деп атайбыз.*

(Үч эселүү Римандын интегралы деп да аташат.)

Ошентип,

$$J = \lim_{\rho \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i = \lim_{\rho \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i =$$

$$= \iiint\limits_{V} f(M)dv = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dv, \qquad (2)$$

кыскача

$$J = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dv \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0 \quad \forall V_i \forall M_i \in V_i \quad \rho < \delta \Rightarrow |\sigma - J| < \varepsilon.$$

Эгерде элементардык V_i бөлүкчөлөрдүн грандары тиешелүү координат тегиздигине жарыш болгон параллелепипед болсо, анда алардын көлөмдөрү ΔV_i параллелепипеддин үч өлчөмдөрүнүн көбөйтүндүсүнө $\Delta v_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$ барабар болот эле. Бул учурда үч эселүү интеграл

$$J = \iiint\limits_{V} f(M)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz \qquad (3)$$

түрүндө жазылат.

§ 3. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДЫН АНЫКТАЛУУ ШАРТТАРЫ

Бир аргументтүү же эки аргументтүү функциялар сыяктуу эле чектелген бардык үч аргументтүү $f(x,y,z)$ функциялары V областы боюнча интегралдана бербейт. Бул интегралдын интегралдануу шарттарын аныктоо үчүн аnык интеграл же кош интеграл сыяктуу, Дарбунун жогорку жана төмөнкү суммаларын түзөлү.

Чектелген $f(x,y,z)$ функциясы кубталуучу V областында берилсин жана V нерсесин элементардык $V_i(i=1,2,\dots,n)$ бөлүкчөлөргө бөлүп, ал бөлүкчөлөрдөгү $f(x,y,z)$ функциясынын накта жогорку M_i жана накта төмөнкү m_i маанилерин аныктап, Дарбунун жогорку жана төмөнкү суммаларын түзөбүз.

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta v_i\,,\qquad s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta v_i$$

1-теорема. *$f(x,y,z)$ функциясынын V областы боюнча үч эселүү интегралы аныкталыш үчүн*

$$\lim_{\rho\to 0}(S-s)=0 \quad \text{же} \quad \lim_{\rho\to 0}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta v_i \quad \text{же} \quad |S-s|<\varepsilon$$

шарттарынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү шарт болуп саналат. Мында $\omega_i=M_i-m_i$ ошол $f(x,y,z)$ функциясынын V_i бөлүкчөсүндөгү термелүүсү.

Бул шарттан төмөнкү теоремалар келип чыгат.

2-теорема. *Ар кандай $f(x,y,z)$ функциясы чектелген кубталуучу туюк V областында үзгүлтүксүз болсо, анда ал V областында интегралдануучу функция болот.*

3-теорема. *Эгерде $f(x,y,z)$ функциясы чектелген туюк кубталуучу V областынын бардык чекиттеринде, кээ бир нөл көлөмдүү көптүктөрдүн чекиттеринен башка, чектелсе жана үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x,y,z)$ функциясы V областында интегралдануучу функция болот.*

Дарбунун суммаларынын касиеттерин жана теоремалардын далилдөөлөрүн окуучуларга сунуш кылабыз.

Үч эселүү интегралы аныкталган $f(x,y,z)$ функциясын V областында интегралдануучу функция деп атайбыз.

§ 4. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДЫН КАСИЕТТЕРИ

1^0. **Сызыктуу касиети.** Эгерде $f(x,y,z)$ жана $g(x,y,z)$ функциялары кубталуучу V областында интегралдануучу функциялар болушса, анда сөзсүз $\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)$, $(\alpha,\beta\in R)$ функциясы дагы V областында интегралдануучу функция болот жана

$$\iiint\limits_V\left[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)\right]dv=\alpha\iiint\limits_V f(x,y,z)dv+\beta\iiint\limits_V g(x,y,z)dv$$

барабардыгы орун алат.

2^0. **Аддитивдик касиети.** Эгерде $V=V_1\cup V_2$ турса жана V_1,V_2 областтары жалпы ички чекитке ээ болбосо, анда $f(x,y,z)$ функциясынын V областында интегралдануучулугунан анын V_1 жана V_2де интегралдануучулугу келип чыгат жана

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dv \tag{4}$$

барабардыгы орун алат.

○ Үч эселүү интегралдын аныкталышы жөнүндөгү теоремадан $f(x,y,z)$ функциясы ар бир V_1 жана V_2 областтарында интегралдануучу жана үзгүлтүксүз функция экендиги келип чыгат. Эми (4) формуланын орун алышын көрсөтөлү. $f(x,y,z)$ функциясынын интегралдык суммасын түзгөндө V_1 жана V_2 областтарын чектеген беттерди V областтын бөлүү бөлүкчөлөрүнүн беттерине кошуп жиберүүгө болот (үч эселүү интеграл областты бөлүкчөлөргө бөлүүдөн көз каранды эмес). Анда $f(x,y,z)$ функциясынын интегралдык суммасын эки V_1 жана V_2 областка туура келген n бөлүкчөлөрдөн түзүүгө болот:

$$\sum_{V} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i = \sum_{V_1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i + \sum_{V_2} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i.$$

Бул барабардыктан $\rho \to 0$ пределге өтсөк, (4) келип чыгат. ●

3^0. Монотондуулук касиет. Эгерде $f(x,y,z)$ жана $g(x,y,z)$ функциялары V областында интегралдануучу функциялар болуп, $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$ барабардыгы $\forall(x,y,z) \in V$ үчүн орун алса, анда сөзсүз

$$\iiint_V f(x,y,z)dv \leqslant \iiint_V g(x,y,z)dv$$

барабарсыздыгы орун алат.

Натыйжалар. 1. Эгерде $f(x,y,z)$ функциясы чектелген туюк кубталуучу V да үзгүлтүксүз болуп $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ барабарсыздыгы орун алса, анда

$$mV \leqslant \iiint_V f(x,y,z)dv \leqslant MV,$$

мында V болсо, V областынын көлөмү, ал эми m жана M турактуу сандары $f(x,y,z)$ функциясынын V областындагы эң чоң жана эң кичине маанилери.

2. Эгерде $f(x,y,z)$ функциясы чектелген туюк V областында үзгүлтүксүз болуп жана белгисин сактаса, анда

$$J = \iiint_V f(x,y,z)dv$$

интегралы да ошол эле белгиге ээ болот:

$$J \geqslant 0, \text{ эгерде } f(x,y,z) \geqslant 0 \text{ болсо,}$$

жана

$$J \leqslant 0, \text{ эгерде } f(x,y,z) \leqslant 0 \text{ болсо.}$$

Мындан башка, эгерде кандайдыр бир V областынын чекитинде (x_0, y_0, z_0) функциясынын мааниси $f(x_0, y_0, z_0) > 0$ болсо, анда $J > 0$ жана $f(x_0, y_0, z_0) < 0$ болсо, анда $J < 0$ болот.

3^0. **Интегралды чамалоо.** Эгерде $f(x,y,z)$ функциясы чектелген туюк, кубталуучу V областында интегралданса, анда $|f(x,y,z)|$ функциясы да ошол эле областта интегралдануучу функция болот жана

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)dv\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|dv$$

барабарсыздыгы орун алат.

4^0. **Арадагы маани жөнүндө теорема.** Эгерде $f(x,y,z)$ функциясы чектелген туюк кубталуучу V областында үзгүлтүксүз болсо, анда ал областта сөзсүз (x_0, y_0, z_0) чекит аныкталып,

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$$

барабардыгы орун алат. (V областынын көлөмү ошол эле V менен белгиленди.)

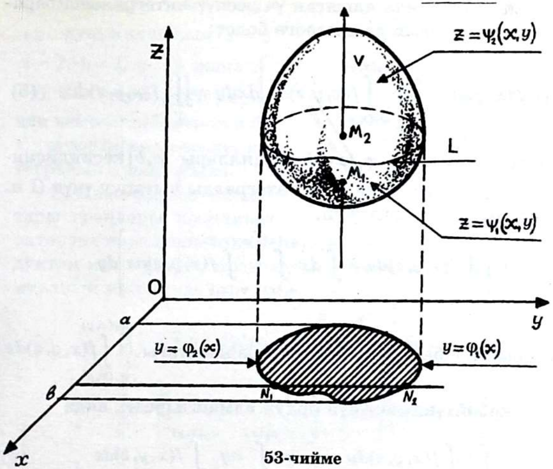
§ 5. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДЫ ЭСЕПТӨӨ

Чектелген туюк кубталуучу V областында $f(x,y,z)$ функциясы аныкталып үзгүлтүксүз болуп жана ал V областы төмөнкү шарттарды канааттандырсын:

1^0. V областына жүргүзүлгөн oz огуна жарыш түз сызык, ал областты курчап турган бетти эки гана чекитте кесип өтсүн (53-чиймеде кирүү чекити M_1 жана чыгуу чекти M_2).

2^0. V областынын xoy тегиздигиндеги проекциясы чектелген жалпак квадратталуучу D областын түзсүн жана ар кандай oy огуна жарыш түз сызык областтын чегин эки чекитте кесип өтсүн (53-чиймеде N_1 кирүү, N_2 чыгуу чекити).

Ушул шарттар орун алганда V областын курчап турган бет эки бөлүктөн турат: төмөнкү $z = \psi_1(x,y)$ жана жогорку $z = \psi_2(x,y)$ жана түзүүчүсү oz огуна жарыш болгон цилиндрдик бетти түзөт (53-чиймеде цилиндрдик бет L сызыгына жыйылып калды).



53-чийме

Ушундай эле D областынын чеги эки $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ ийри сызыктан жана түз сызыктардын $x=a$, $x=b$ кесиндисинен турат (53-чиймеде ал түз сызыктардын кесиндиси чекиттерге жыйналган). Анда $\psi_1(x,y)\leqslant\psi_2(x,y)$; $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$ жана $a<b$ барабарсыздыктары аткарылат.

Эми $\psi_1(x,y)$ жана $\psi_2(x,y)$ функциялары D областында үзгүлтүксүз болсун деп эсептесек, анда

$$\Phi(x,y)=\int\limits_{\psi_1(x,y}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

айрым интегралы D областында x жана y боюнча үзгүлтүксүз функция болот. Бул интегралдын ($\Phi(x,y)$ функциясынын) D областы боюнча алынган кош интегралы $f(x,y,z)$ функциясынын V областы боюнча алынган үч эселүү интегралына барабар боло тургандыгын далилдөөгө болот:

$$\iint\limits_D \Phi(x,y)dv = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\psi_1(x,y}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv\,. \quad (5)$$

Эгерде $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(x)$ функциялары $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда кош интегралды чыгаруу үчүн (I п. § 2) (7) формуланы колдонуп,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\psi_1(x,y}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dy$$

формуласын алабыз. Акыркы барабардыктагы $\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ менен dy көбөйтүндүлөрүнүн ордун алмаштырсак, анда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \quad (6)$$

формуласына келебиз.

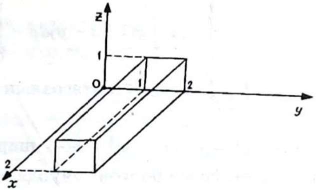
Эскертүү: 1. Эгерде V областы алдыдагы шарттарды канааттандырбаса, анда аны ал шарттарды канааттандыра тургандай кылып бөлүктөргө бөлүү керек. Бул убакта V область боюнча алынуучу үч эселүү интеграл ар бир бөлүктөр боюнча алынган үч эселүү интегралдын суммасына барабар болот.

2. Үч эселүү интегралды эсептөөдө интегралдоо тартиби (6) формуладан башкача болушу мүмкүн. Бул учурда V областына коюлган шарт сөзсүз дагы өзгөрүшү керек.

Алдыңкы (6) формула жөнөкөйлөнөт, эгерде грандары координат тегиздиктерине жарыш болгон параллелепипед болсо, б.а. $\varphi_1(x)=c$, $\varphi_2(x)=d$ жана $\psi_1(x,y)=m$, $\psi_2(x,y)=n$ (c,d,m,n — турактуу чоңдуктар)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz\,. \quad (7)$$

Мисалдар: 1. $u = x + y + z$ функциясынын $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$ жана $z = 0$, $z = 1$ тегиздиктери менен чектелген V нерсеси боюнча алынган үч эселүү интегралын аныктагыла.



54-чийме

Δ Интегралдоо областтары грандары координат окторуна параллель болгон параллелепипед (54-чийме). Ошондуктан интегралдоо пределдери турактуу. Алдыңкы (7) формуланын негизинде

$$\iiint_V (x + y + z)dxdydz = \int_0^2 dx \int_1^2 dy \int_0^1 (x + y + z) =$$

$$= \int_0^2 dx \int_1^2 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)_0^1 dy = \int_0^2 dx \int_1^2 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} y \right)_1^2 dx = 6. \blacktriangle$$

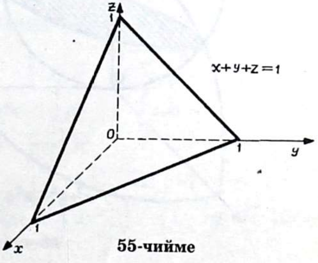
2. $\iiint_V xydxdydz$ интегралын V координаттык тегиздиктер жана $x + y + z = 1$ тегиздиги менен чектелген тетраэдр болгон учурда эсептегиле.

Δ Мында $V = \{(x, y, z):$ $:0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant$ $\leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$ (55-чийме).

Анда (6) формула боюнча

$$\iiint_V xydxdydz =$$

$$= \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{1-x-y} dz =$$

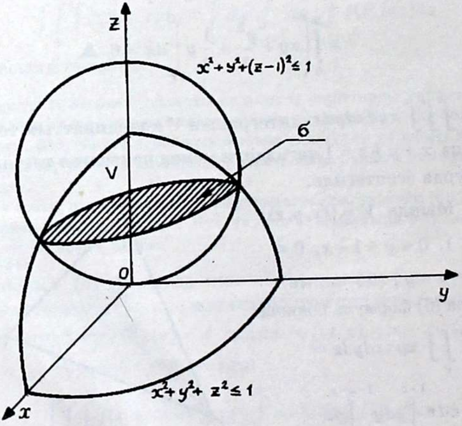


55-чийме

$$= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1 - x - y)dy = \int_0^1 x \frac{(1 - x)^3}{6} dx = \frac{1}{120}. \ \blacktriangle$$

3. $\iiint_V z dx dy dz$ интегралын V областы эки $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ жана $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqslant 1$ — шарларынын кесилишинен пайда болгон нерсе болгон учурда эсептегиле (56-чийме).

Δ Биринчи шардын жогорку бөлүгүнүн бети $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ теңдемеси, экинчисинин төмөнкү бөлүгүнүн бети $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ теңдемеси аркылуу аныкталат. Алар $\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \frac{3}{4},\ z = \frac{1}{2}\right\}$ айлана боюнча кесилишет. Ошондуктан V областы $\sigma = \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant \frac{3}{4}\right\}$ тегерегинде берилген



56-чийме

$\psi_1(x,y)=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$ жана $\psi_2(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ графиктери менен чектелген «Линза» түрүндө болот. Демек,

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\iint\limits_\sigma\left(\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\right)dxdy=\iint\limits_\sigma\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{1}{2}\right)dxdy.$$

Акыркы кош интегралды уюлдук координат системасына өтүп эсептесек, төмөнкү келип чыгат:

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_o^{2\pi}d\varphi\int\limits_o^{\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{2}\right)rdr=\frac{5}{24}\pi.\ \blacktriangle$$

4. Алдыңкы үч эселүү интегралды V областы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ эллипсоидасынын жогорку бөлүгү болгон учурда эсептегиле.

Δ Эллипсоиданын xoy тегиздигиндеги проекциясы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ эллипсин берет. Ошондуктан

$$V=\left\{(x,y,z):-a\leqslant x\leqslant a,\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\right.$$

$$\left.o\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}$$

болуп, (6) формуланын негизинде

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_{o}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}zdz=$$

$$=\frac{c^2}{2}\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=c^2\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{o}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$= \frac{2bc}{3a^3}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)^{3/2}dx = \frac{4bc^2}{3a^3}\int_{0}^{a}(a^2 - x^2)^{3/2}dx = \frac{\pi}{4}abc^2$$

(мында интеграл алдындагы функциянын жуптугун эки жолу пайдаландык).

Бул интегралдын чыгаруу жолун жеңилдетүүгө болот. Ошол максатта берилген интегралды

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^c zdz\iint_{D_z} dxdy$$

түрүндө жазалы, мында D_z эллипсоидди $z = z$ тегиздиги менен кескендеги xoy тегиздигиндеги проекциясы. Ал эми

$$\iint_{D_z} dxdy$$

кош интегралы D_z проекциясынын аянтын берет. Проекциясы, жарым октору $a = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $b = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ болгон, контуру

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1$$

теңдемеси болгон эллипс. Анда анын аянты

$$\iint_{D_z} dxdy = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Демек,

$$\iiint_V zdxdydz = \pi ab\int_0^c z\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{\pi abc^2}{4}. \blacktriangle$$

5. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$ интегралын V областы $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ эллипсоид болгон учурда эсептегиле.

Δ Бул интегралды жогорку ыкма боюнча эсептейли, б.а.

$$\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz = \int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}dx\iint\limits_{D_x} dydz +$$

$$+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}dy\iint\limits_{D_y} dzdx + \int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}dz\iint\limits_{D_z} dydz = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx +$$

$$+\frac{\pi ca}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy + \frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{4}{5}\pi abc. \blacktriangle$$

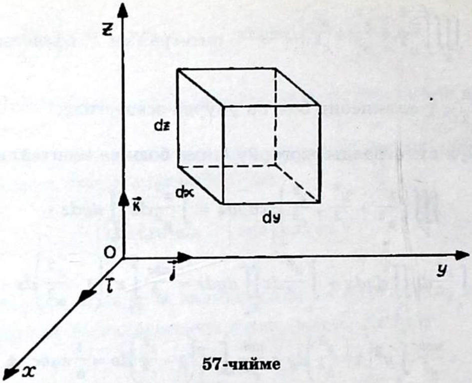
§ 6. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДАГЫ ӨЗГӨРМӨЛӨРДҮ АЛМАШТЫРУУ (ЖАЛПЫ УЧУР)

Декарттык координаталар системасындагы V областындагы аныкталган жана үзгүлтүксүз $f(x,y,z)$ функциясы берилсин. Анда $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ үч эселүү интегралы дайыма аныкталат. Бул интегралдын x, y жана z өзгөрмөлөрү u, v жана t өзгөрмөлөрүнөн бир маанилүү жана үзгүлтүксүз функция болсун жана бир маанилүү үзгүлтүксүз биринчи тартиптеги айрым туундуларга ээ болсун.

Ошентип,

$$\begin{cases} x = x(u,v,t), \\ y = y(u,v,t), \\ z = z(u,v,t) \end{cases}$$

функциялары x, y, z декарттык координаталардагы V областын u, v, t ийри сызыктуу координаталардагы V' областына



57-чийме

бир маанилүү кылып чагылдырышсын. Ушул убакта V областынын ΔV элементи V' областынын $\Delta V'$ элементине өтсүн. Анда декарттык координаталардагы V областынын ΔV элементинин көлөмү төмөнкүгө барабар болот (57-чийме):

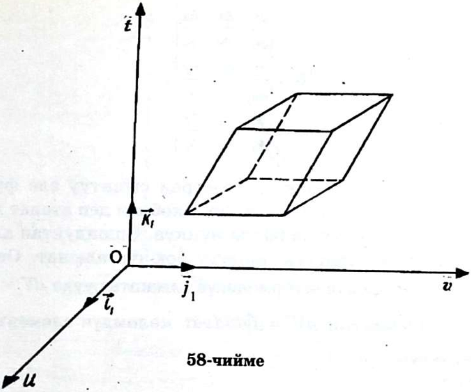
$$dV = dxdydz\,.$$

Көлөмдүн элементин үч векторлордун $\vec{dx}$, $\vec{dy}$ жана $\vec{dz}$ аралаш көбөйтүндүсү катарында карайбыз:

$$d\vec{V} = \left|\left[\vec{dx},\ \vec{dy}\right] \times \vec{dz}\right| = \left\|\begin{matrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{matrix}\right\|,$$

мында $\vec{dx} = dx\vec{i} + o\cdot\vec{j} + o\cdot\vec{k}$; $dy = o\cdot\vec{i} + dy\vec{j} + o\cdot\vec{k}$; $dz = o\cdot\vec{i} + o\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$, $\vec{i},\vec{j}$ жана $\vec{k}$ ox, oy жана oz окторунун бирдик вектору (57-чийме).

Эми $x = x(u,v,t)$, $y = y(u,v,t)$, $z = z(u,v,t)$ болсун деп, координатты өзгөртөлү. Ал үчүн функциянын өсүндүсүн жогорку тартиптеги тактыкта анын дифференциалы менен алмаштырабыз жана бул функциялардын толук дифференциалын тапсак, анда $\vec{dx}$, $\vec{dy}$ жана $\vec{dz}$ векторлору



58-чийме

$$d\vec{x} = \frac{\partial x}{\partial u}du\vec{i}_1 + \frac{\partial x}{\partial v}dv\vec{j}_1 + \frac{\partial x}{\partial t}dt\vec{k}_1,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du\vec{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}dv\vec{j}_1 + \frac{\partial y}{\partial t}dt\vec{k}_1,$$

$$d\vec{z} = \frac{\partial z}{\partial u}du\vec{i}_1 + \frac{\partial z}{\partial u}dv\vec{j}_1 + \frac{\partial z}{\partial t}dt\vec{k}_1,$$

мында $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ *ou, ov* жана *ot* окторунун бирдик векторлору (58-чийме). Анда көлөмдүн элементин векторлордун аралаш көбөйтүндүсү катарында алсак болот:

$$dV' = \left|\left[\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}\right] \times \overrightarrow{dz}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}\right| dudvdt = |I|dudvdt,$$

мында

$$
|I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}. \qquad (9)
$$

Бул (9) аныктагыч кош интеграл сыяктуу эле функционалдык аныктагыч же өзгөртүүчү Якобиан деп аталат жана ал терс мааниге ээ болуп калышы мүмкүн. Ошондуктан ал интеграл алдында абсолюттук чоңдугу боюнча алынат. Ошентип, үч эселүү интегралдын өзгөрмөлөрүн алмаштырууда $dV = dxdydz$ көлөмдүн элементин $dV' = |I|dudvdt$ көлөмдүн элементине алмаштырабыз.

Анда

$$
\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left[x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t)\right]|I|dudvdt \qquad (10)
$$

формуласын алабыз. Бул формула u, v жана t ийри сызыктуу координаталар болгон эң жалпы учур үчүн орун алат.

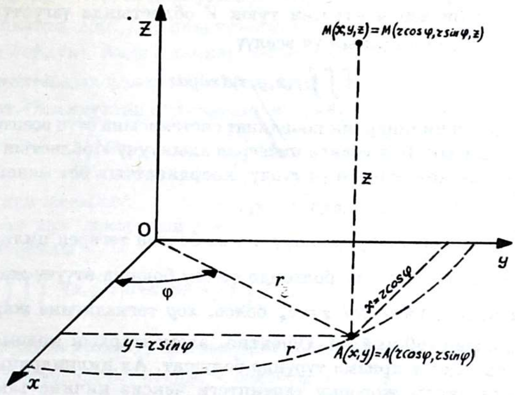
Көпчүлүк учурда айрым учурларды пайдалануу өтө ыңгайлуу.

1. Цилиндрдик координаталардагы үч эселүү интеграл

Мейкиндикте чекиттердин абалы (чекиттердин геометриялык орду) декарттык координаталар системасынан башка цилиндрдик координаталар системасы деп аталуучу система менен да аныкталат, б.а. мейкиндиктеги чекиттердин абалы, xoy тегиздигиндеги r, φ уюлдук координаталары жана чекиттен xoy тегиздигине чейинки аралык, z аппликатасы аркылуу аныкталса, анда мындай координаталарды цилиндрдик координаталар дейбиз. Мында

$$
-\pi \leqslant \varphi \leqslant +\pi,
$$

$$
o \leqslant r < +\infty
$$



59-чийме

барабарсыздыктары орун алат жана M чекити xoy тегиздигинин үстүндө жатса $z > o$, алдында болсо $z < o$ деп эсептелинет.

Мейкиндикте чекиттин декарттык координаты анын цилиндрдик координатасы менен (59-чийме)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad (11)$$

барабардыктары аркылуу байланышарын оңой эле далилдөөгө болот. Эми биз, (9) функционалдык аныктагычты цилиндрдик координат үчүн эсептейли:

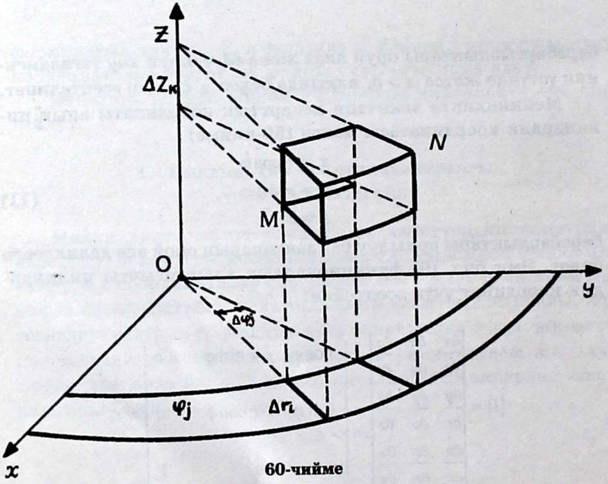
$$|I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & o \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & o \\ o & o & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Азыр бизден чектелген туюк V областында үзгүлтүксүз $f(x, y, z)$ функциясынын үч эселүү

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

интегралын цилиндрдик координат системасына өтүп эсептөөнү талап кылсын. Бул убакта интеграл алынуучу V областын элементардык көлөмдөргө үч түрдүү координаттык бет менен бөлөбүз: $r = r_i$, $\varphi = \varphi_j$ жана $z = z_k$.

Биринчиси $r = r_i$ айлануу огу oz болгон тегерек цилиндрлер. Экинчиси $\varphi = \varphi_j$ болгондо oz огу боюнча өтүүчү жарым тегиздиктер. Үчүнчүсү $z = z_k$ болсо, xoy тегиздигине жарыш тегиздиктер (60-чийме). Ошентип, элементардык көлөм ΔV ийри сызыктуу призма түрүндө болушат. Ал цилиндрдин негизинин аянты жогорку тартиптеги чексиз кичине тактык



60-чийме

менен $\Delta s = r\Delta\varphi \cdot \Delta r$ көбөйтүндүсүнө барабар, ал эми призманын бийиктиги $\Delta z((i,j,k)$ индекстери жөнөкөй болсун үчүн калтырып койдук). Анда цилиндрдик координаталар системасында элементардык көлөм $\Delta V = r\Delta\varphi\Delta r\Delta z$ формуласы аркылуу аныкталат. Ошондуктан цилиндрдик координатта үч эселүү интеграл

$$\iiint\limits_{V} F(\varphi, r, z)dV = \iiint\limits_{V'} F(\varphi, r, z)rdrd\varphi dz \qquad (12)$$

түрүндө жазылат.

Ал эми декарттык координат системасындагы үч эселүү интегралды

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz \qquad (13)$$

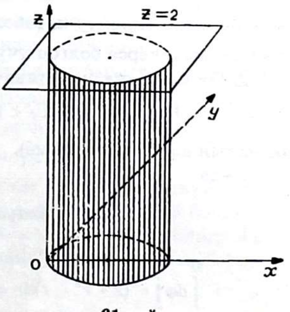
формуласы аркылуу цилиндрдик координаталарга өтө алабыз.

Мисалдар: 6. Эгерде V областы $z = o$, $z = 2$ тегиздиктери жана $y^2 = 3x - x^2$ цилиндрдик бет менен чектелсе

$$\iiint\limits_{V} z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$$

интегралын цилиндрдик координаталарга өтүп эсептегиле (61-чийме).

Δ Цилиндрдик координаталарга $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ аркылуу өтөбүз. Функционалдык аныктагыч $I = r$. Эми r жана φ нин өзгөрүү пределдерин аныктайлы. φ өзгөрмөсү $-\frac{\pi}{2}$ ден $+\frac{\pi}{2}$ ге чейин өзгөрөт, $-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$. Ал эми r дин пределин аныктоо максатында $y^2 = 3x - x^2$ теңдемесине x жана y маанилерин койсок:



61-чийме

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 3r\cos\varphi,$$

$$r^2 = 3r\cos\varphi$$

же

$$r = 3\cos\varphi\ .$$

Анда $o \leqslant r \leqslant 3\cos\varphi$ пределин алабыз. Демек,

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_o^{3\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_o^2 zdz =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_o^{3\cos\varphi} r^2 \left(\frac{z^2}{2}\right)_o^2 dr = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_o^{3\cos\varphi} r^2 dz = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\Bigg|_o^{3\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = 18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi = 18\sin\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} -$$

$$-18\frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 18(1+1) - \frac{18}{3}(1+1) = 36 - 12 = 24. \ \blacktriangle$$

7. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын V областы, $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$ конусу жана айлануу параболоиди $z \leqslant 2 - x^2 - y^2$ менен кесилишкендеги нерсе болгон учурда эсептегиле.

Δ Цилиндрдик координаталарга өтсөк, анда

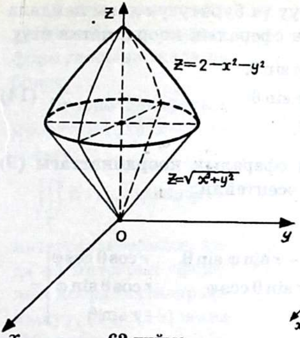
$$V = \left\{(r,\varphi,z)\in R: o \leqslant r \leqslant 1,\ o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ r \leqslant z \leqslant 2 - r^2\right\}$$

областын алабыз (62-чийме).

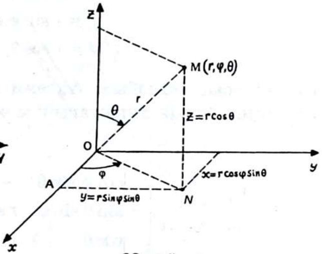
Анда

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_o^{2\pi} d\varphi \int\limits_o^1 r^2 dr \int\limits_r^{2-r^2} dz =$$

$$= \int\limits_o^{2\pi} d\varphi \int\limits_o^1 r^2(2 - r^2 - r)dr = \int\limits_o^{2\pi}\left(2\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} - \frac{r^2}{2}\right)_o^1 d\varphi = \frac{13}{30}\pi. \ \blacktriangle$$



62-чийме



63-чийме

2. Сфералык координаталардагы үч эселүү интеграл

Мейкиндикте, сфералык координаталардагы ар кандай чекиттердин абалын (геометриялык ордун) үч r, φ жана θ чоңдуктары менен толук аныктоого болот (63-чийме).

Мында: r — координат башталмасынан чекитке чейинки аралык, чекиттин радиус-вектору деп аталат;

φ – радиус-вектордун xoy тегиздигине түшүрүлгөн проекциясы менен ox огунун оң багыты боюнча түзүлгөн бурч — полярдык бурч деп аталат (саат жебесине каршы эсептелинет);

θ радиус-вектору менен oz огунун оң багыты боюнча түзүлгөн бурч. Ушул r, φ жана θ координаталарды сфералык координаталар дейбиз жана каалаган чекиттер үчүн $o \leqslant r < +\infty$, $o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $o \leqslant \theta \leqslant \pi$ байланыштар орун алат.

Биз, M чекитинен xoy тегиздигине MN перпендикулярын түшүрүп N чекитин алабыз. Ал N чекитинен ox огуна NA перпендикулярын тургузалы. Анда OA, AN жана NM кесиндилер M чекитинин тик бурчтуу x, y жана z координатын берет. Тик бурчтуу ONM үч бурчтугунан

$$ON = r\cos(90^\circ - \theta) = r\sin\theta \text{ ны}$$

алабыз. Ал эми OAN тик бурчтуу үч бурчтугун дагы пайдаланып, тик бурчтуу координаттан сфералык координатка өтүү

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta; \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta; \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned} \tag{14}$$

формуласын жазабыз. Ал эми сфералык координаттагы (9) функционалдык аныктагычты эсептейли:

$$|I| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & o & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta. \tag{15}$$

Декарттык координаталардагы үч эселүү интегралдан сфералык координатага өтүүдө, интеграл алынуучу областты элементардык көлөмдөргө төмөнкү беттер аркылуу бөлүү ыңгайлуу: $r = r_i$ — сфералык беттер; $\varphi = \varphi_j$ болсо oz огунан башталуучу жарым тегиздиктер;

$\theta = \theta_k$ — чокусу координаталар башталмасында болгон конустук беттер. Бул убакта элементардык көлөмдөр, кырларынын узундуктары Δr_i; $r_i\Delta\theta_k$ жана $r_i\sin\theta\Delta\varphi_j$ болгон ийри сызыктуу параллелепипедди берет. Ал элементардык көлөм жогорку тартиптеги тактыкта (i, j, k — индекстери калтырылды).

$$\Delta V = r^2\sin\theta\Delta r\cdot\Delta\theta \tag{16}$$

формуласына барабар болору ачык (64-а,б чиймелер).

Ошентип, сфералык координаталуу $F(r,\varphi,\theta)$ функциясынын кубталуучу V областындагы үч эселүү интегралы

$$\iiint\limits_{V'} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta \tag{17}$$

түрүндө болот.

Интегралдоонун пределдери V областынын формуласына жараша болот.

Эгерде декарттык координаталардагы үч эселүү

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

интегралы берилсе, анда ал интеграл сфералык координаталар аркылуу, (14), (15) жана (16) эске алып,

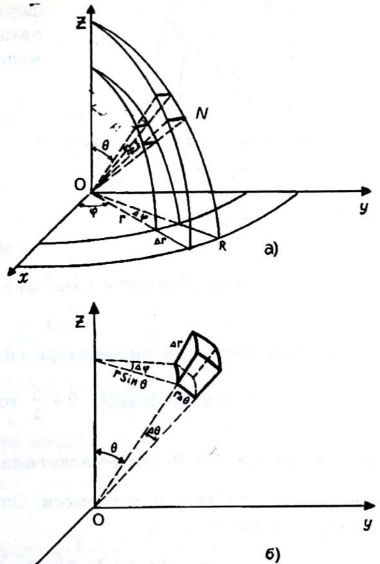
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\times$$

$$\times r^2 \sin\theta dz d\varphi d\theta \qquad (18)$$

формуласы боюнча аныкталат.



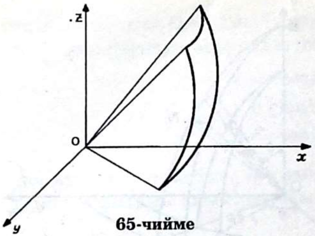
64-чийме

Мисалдар: 8. Эгерде V областы биринчи октантта жаткан жана $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $z^2 = x^2 + y^2$; $z = 0$; $y = 0$; $y = x$ беттери менен чектелген болсо, анда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

үч эселүү интегралын сфералык координаталар аркылуу түюнткула (65-чийме).

Δ Мында $x = r\sin\theta\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi\sin\theta$; $z = r\cos\theta$ болгондуктан функционалдык аныктагыч $I = r^2\sin\theta$ га барабар (15-



65-чийме

формула). Сфералык координаталардагы шардын тендемелерин аныктайлы:

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = 4,$$

$$r^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 4,$$

$$r^2[\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta] = 4,$$

$$r^2 = 4.$$

Калган беттердин тендемелери ушул сыяктуу аныкталат: $\theta = \frac{\pi}{4}$ — конустун тендемеси, $\theta = \frac{\pi}{2}$ горизонталдык тегиздиктин тендемеси, $\varphi = 0$, xoz тегиздигинин тендемеси, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ биссектордук тегиздиктин тендемеси. Ошентип, сфералык координаталарда V областы

$$2 \leqslant r \leqslant 3; \quad \pi/4 < \theta < \pi/2;$$

$$0 < \varphi < \pi/4$$

барабарсыздыктары аркылуу берилет. Анда

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_2^3 f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2\sin\theta dz. \ \blacktriangle$$

9. Эгерде V областы $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ шары болсо, $\iiint_V x^2 dxdydz$ интегралын эсептегиле.

Δ Сфералык координатка өтсөк, анда V областы үчүн $0 \leqslant r \leqslant R;\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ барабарсыздыгы канааттандырылат. Анда

$$\iiint_V x^2 dxdydz = \iiint_{V'} r^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr =$$

$$= \frac{R^5}{2\cdot 5}\int_0^{\pi} \sin^3\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) = \frac{4\pi R^5}{15}. \blacktriangle$$

10. Эгерде V областы $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ шарынын жогорку бөлүгү болсо, $\iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$ интегралын эсептегиле.

Δ Бул учурда, алдыңкы мисал сыяктуу $0 \leqslant r \leqslant R;\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ барабарсыздыгы орун алат. Анда

$$\iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \iiint_{V'} r^4 \sin^3\theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) =$$

$$= 2\pi \int_0^R r^4 \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15}\pi R^4. \blacktriangle$$

§ 7. ҮЧ ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛ АРКЫЛУУ КӨЛӨМДҮ ЭСЕПТӨӨ

1. Декарттык координата

Тик бурчтуу, $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$; $m \leqslant z \leqslant n$ барабарсыздыгы менен чектелген, параллелепипеддин көлөмү

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n dz, \tag{19}$$

формуласы аркылуу аныкталат. Мында интегалдоо тартибин өзгөртүүгө болот.

Эгерде V областы $z_1 = \psi_1(x,y)$; $z_2 = \psi_2(x,y)$ $\big(\psi_2(x,y) > \psi_1(x,y)\big)$ беттери менен чектелсе жана ал xoy тегиздигине $y = \varphi_1(x)$; $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) < \varphi_2(x))$ ийри сызыктары жана $x=a$; $x=b$ $(a<b)$ түз сызыктары менен чектелген D областына проекцияланса (53-чийме) же

$$V = \{(x,y,z): a \leqslant x \leqslant b;\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x); \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x,y)\}$$

түрүндө болсо, анда көлөм

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz \tag{20}$$

формуласы аркылуу эсептелет. Мында деле интегралдоо тартибин өзгөртүүгө болот, алсак область

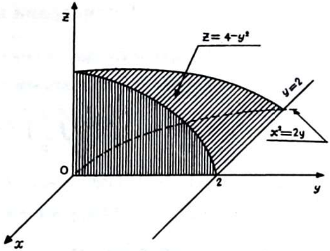
$$V = \{(x,y,z): c \leqslant y \leqslant d;\ \varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y);\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y)\}$$

түрүндө болсо, анда

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_c^b dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz \tag{21}$$

формуласын колдонууга болот.

11. $x=1$; $x=4$; $y=2$; $y=3$; $z=3$; $z=4$ тегиздиктери менен чектелген көлөмдү эсептегиле.



66-чийме

Δ Мында x, y жана z чоңдуктары V областында $V=\{(x,y,z):\ 1\leqslant x\leqslant 4;\ 2\leqslant \leqslant y\leqslant 3;\ 3\leqslant z\leqslant 4\}$ барабарсыздыктары аркылуу берилгендиктен (19) формула боюнча

$$V=\int_1^4 dx\int_2^3 dy\int_3^4 dz=\int_1^4 dx\int_2^3(4-3)dy=$$

$$=\int_1^4(3-2)dx=x\Big|_1^4=4-1=3\ \text{(куб.бирд.)}.\ \blacktriangle$$

12. $x^2=2y$, $z=4-x^2$ цилиндрлери $x=0$, $z=0$ тегиздиктери менен чектелген көлөмдү эсептегиле (66-чийме).

Δ Бул областта $V=\{(x,y,z):0\leqslant y\leqslant 2;\ -\sqrt{2y}\leqslant x\leqslant 0;\ 0\leqslant z\leqslant \leqslant 4-y^2\}$, болгондуктан (21) формула боюнча

$$V=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{2y}}^{0} dx\int_0^{4-y^2} dz=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{2y}}^{0}(4-y^2)dx=$$

$$=\int_0^2(4x-y^2x)\Big|_{-\sqrt{2y}}^{0}dy=\int_0^2\left(4\sqrt{2}\sqrt{y}-\sqrt{2}\sqrt{y^5}\right)dy=$$

$$=128/_{21}\ \text{(куб.бирд.)}\ \blacktriangle$$

2. Цилиндрдик координатта

Эгерде (13) формулада $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\equiv 1$ болсо, анда цилиндрдик координаттагы көлөмдү

$$V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz \tag{22}$$

формула аркылуу аныктайбыз. Ал эми

$$V=\{(r,\varphi,z):\ o\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ o\leqslant r\leqslant r(\varphi);\ f_1(\varphi,r)\leqslant z\leqslant f_2(\varphi,r)\}$$

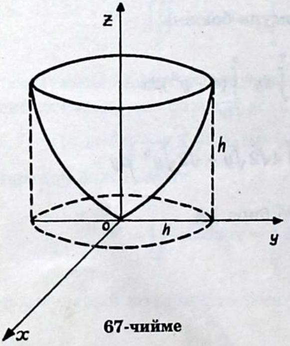
түрүндө болсо, анда көлөм

$$V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz=\int\limits_o^{2\pi}d\varphi\int\limits_o^{r(\varphi)}rdr\int\limits_{f_1(\varphi_1 r)}^{f_2(\varphi,r)}dz \tag{23}$$

формуласы боюнча эсептелет.

13. $hz=x^2+y^2$, $z=h$ беттери менен чектелген көлөмдү эсептегиле.

Δ Бул көлөм төмөн жагынан $z=\dfrac{x^2+y^2}{h}$ параболоидасы, жогору жагынан $z=h$ тегиздиги менен чектелген жана xoy тегиздигине, $x^2+y^2\leqslant h^2$ тегерегине проекцияланат. Цилиндрдик координатка өтсөк, анда параболоиддин теңдемеси $z=\dfrac{r^2}{h}$ ка барабар. Бул убакта



67-чийме

$$V=\left\{(r,\varphi,z):\ o\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ o\leqslant r\leqslant h;\ \frac{r^2}{h}\leqslant z\leqslant h\right\}$$

болуп, көлөм

$$V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_{r^2/h}^h dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(h - \frac{r^2}{h}\right) r dr = \int_0^{2\pi} \left[\frac{hr^2}{2} - \frac{r^4}{4h}\right]_0^h d\varphi =$$

$$= \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{2} \text{(куб. бирд.)}. \ \blacktriangle$$

3. Сфералык координатта

Эгерде (18) формуладагы $f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta) \equiv 1$ болсо, анда сфералык координатта көлөм

$$V = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \tag{24}$$

формуласы боюнча эсептелет. Эгерде нерсе

$$V = \{(\varphi, \theta, z) : o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ o \leqslant \theta \leqslant \pi;\ o \leqslant r \leqslant f(\varphi, \theta)\}$$

түрүн канааттандырса, анда

$$V = \int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^h \sin\theta d\theta \int_o^{f(\varphi,\theta)} r^2 dr \tag{25}$$

формуласы боюнча аныкталат.

14. Биринчи октантта жаткан жана $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $z^2 = x^2 + y^2$; $z = 0$; $y = 0$ жана $y = x$ беттери менен чектелген көлөмдү аныктагыла (жогорку 8-маселени жана 65-чиймени карагыла).

Δ Бул учурда V областы

$$V = \left\{(\varphi, \theta, r) : o \leqslant \varphi \leqslant \pi/_4;\ \pi/_4 \leqslant \theta \leqslant \pi/_2;\ 2 \leqslant r \leqslant 3\right\}$$

түрүндө берилди. Анда (25) формула боюнча

$$V = \int_o^{\pi/4} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_2^3 r^2 dr = \frac{19}{3} \int_o^{\pi/4} (-\cos\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi =$$

$$= \frac{19\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{19\sqrt{2}\pi}{24} \text{ (куб. бирд.).} \blacktriangle$$

15. $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = a^2\left(x^2 + y^2\right)^2$ бети менен чектелген көлөмдү аныктагыла.

Δ Сфералык координатка $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ өтсөк, анда функционалдык аныктагыч (15) $J = r^2\sin^2\theta$ га барабар болот жана сфералык координатада берилген беттин теңдемеси

$$r = a\sin^2\theta,$$

түрүндө жазылат. Бул теңдемеден r жуп функция экендиги көрүнүп турат, ошондуктан θ өзгөрүү интервалынын жарымын алып, б.а. $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, андан кийин жыйынтыгын экиге көбөйтүү жетиштүү.

Ошентип,

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{a\sin^2\theta} r^2 dr = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{a\sin^2\theta} d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta d\theta = -\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)^3 d(\cos\theta) = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

$$V = \frac{64}{105}\pi a^3 \text{ (куб.бирд.).} \blacktriangle$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Эгерде $D = \left\{(x, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ тик бурчтук болсо, $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y dxdy$ интегралын чыгаргыла.

Ж о о б у: $(e-1)(e^\pi - 1)$.

2. Областы $xy = 1,\ y = \sqrt{x},\ x = 2$ ийри сызыктары менен чектелген учурунда $\iint\limits_D y\ln x dxdy$ интегралын эсептегиле.

Ж о о б у: $5(2\ln 2 - 1)/8$.

3. Интегралдоо тартибин өзгөрткүлө:

а) $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$; г) $\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

4. Уюлдук координатасына өтүү менен:

а) D областы $x^2 + y^2 \leqslant \pi^2$ тегереги болгон учурда $\iint\limits_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$ интегралын эсептегиле.

Ж о о б у: $2\pi^3$.

б) D областы $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$ айланасы болгон учурда $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$ интегралын эсептегиле.

Ж о о б у: $3\pi a^4/2$.

5. Берилген ийри сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

а) $x = y^2 - 2y,\ x + y = 0$; б) $y = 2 - x,\ y^2 = 4x + 4$;

Ж о о б у: $\frac{1}{6}$. Ж о о б у: $64/3$.

6. Берилген беттер менен чектелген нерсенин көлөмүн эсептегиле:

а) $x^2 + y^2 = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 4$.

Ж о о б у: $8\pi - 32\sqrt{2}/3$.

б) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

Ж о о б у: 88 / 105.

в) $z^2 = xy$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$.

Ж о о б у: 32/9.

7. Эгерде V областы $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z - 2 = 0$ тегиздиктери менен чектелсе, $\iiint\limits_V x^2 yz dx dy dz$ интегралын эсептегиле.

Ж о о б у: 16/315.

8. Эгерде V областы $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$ $(a > 0,\ b > 0)$ тегиздиктери менен чектелген үч грандуу призма болгон учурда $\iiint\limits_V (2x + 3y - z) dx dy dz$ интегралын эсептегиле.

Ж о о б у: $ab^2 \cdot (10b - 3a) / 12$.

9. Берилген беттер

а) $x^2 + y^2 = 2y$ цилиндр жана $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ шар менен чектелген көлөмдү аныктагыла.

Ж о о б у: 4/9.

б) $x^2 + y^2 = 1$ цилиндр жана $x + y + z = \sqrt{2}$, $z = 0$ тегиздиктер менен чектелген көлөмдү аныктагыла.

Ж о о б у: $\pi\sqrt{2}/2$.

XIII глава

ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ЖАНА БЕТТИК ИНТЕГРАЛДАР

I. ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДАР

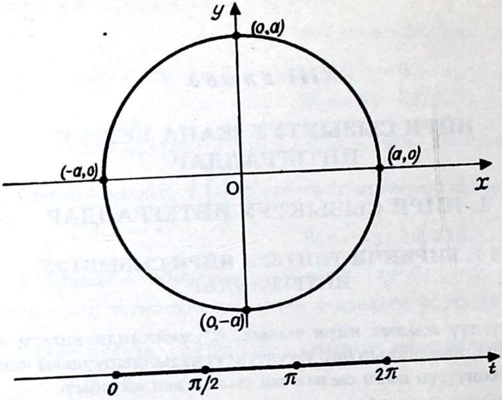
§ 1. БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДАР

Бөлүктүү жылма ийри сызык R^3 мейкиндигиндеги аралыктарды, кандайдыр бир үзгүлтүксүз чагылдыруудагы чекиттердин көптүгүн *ийри сызык* же *сызык* деп айтабыз.

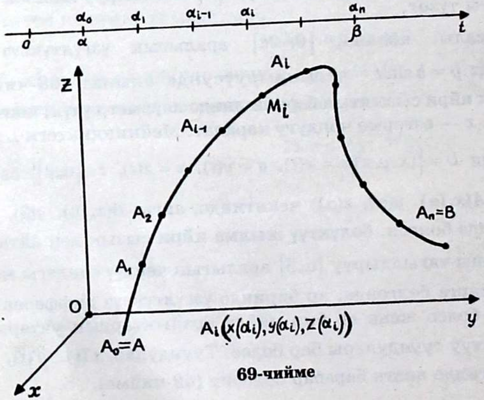
Мисалы, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ аралыгынын түспөлү, үзгүлтүксүз $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = bt$ чагылдырууда, буралма ийри сызык болот.

R^2 тегиздигиндеги үзгүлтүксүз чагылдыруу жалпак ийри сызыкты түзөт.

Мисалы, айлана, $[0, 2\pi]$ аралыгын үзгүлтүксүз $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ чагылдыруусунда алынат (68-чийме). Жалпак ийри сызыктын берилишинде параметр үчүн, көпчүлүк учурда, x — өзгөрмө чоңдугу каралат. Мейкиндиктеги L ийри сызыгын $L = \{(x, y, z) | x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]\}$ башталышы $A(x,(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha))$ чекитинде, аягы $B(x,(\beta),\ y(\beta),\ z(\beta))$ чекитинде болгон, бөлүктүү жылма ийри сызык деп айтабыз, эгерде аны чагылдыруу $[\alpha, \beta]$ аралыгын чектүү сандагы майда аралыктарга бөлгөндө, ар биринде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болсо жана ар бир майда аралыктардын учтарында бир жактуу туундулары бар болсо. Туундулар $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ бир мезгилде нөлгө барабар болбойт (69-чийме).



68-чийме



69-чийме

II. БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫН АНЫКТАМАСЫ

Бөлүктүү үзгүлтүксүз-жылма $L \subset R^3$ ийри сызыгынын чекиттеринде $f(M) = f(x, y, z), M \in L$ функциясы берилсин.

$$L: \{(x, y, z \,/\, x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Эми биз ot огундагы $[\alpha, \beta]$ аралыгын өз эркибизче майда аралыктарга $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = \overline{1, n}$ бөлөбүз, бирок $]\alpha_{i-1}, \alpha_i[\cap]\alpha_{j-1}, \alpha_j[= \varnothing$, $i \neq j$ жана $\bigcup\limits_{i=1}^{n} [\alpha_{i-1}, \alpha_i] = [\alpha, \beta]$ болсун (69-чийме). Ал эми $\alpha_i - \alpha_{i-1} = \Delta t_i$ деп белгилейли. Параметрдин $t = \alpha_i$ маанисине L ийри сызыгынан $A_i(x(\alpha_i), y(\alpha_i), z(\alpha_i))$ чекити туура келсин жана $A_{i-1}A_i$ жаанын узундугу Δs_i болсун. Эгерде $[\alpha, \beta]$ аралыгын бөлүүдөгү диаметри δ нөлгө умтулса, анда сөзсүз $\Delta s_i \to 0$ $\forall i = \overline{1, n}$. Ар бир $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ бөлүкчөлөрдөн өз эркибизче α_i^* чекитин алсак, анда ага L ийри сызыгынан $M_i(x(\alpha_i^*), \ y(\alpha_i^*), \ z(\alpha_i^*))$ чекити туура келет. Эми биз L ийри сызыгы боюнча $f(M)$ функциясына туура келген интегралдык сумма деп аталуучу сумманы түзөбүз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x(\alpha_i^*), y(\alpha_i^*), z(\alpha_i^*)\right)\Delta s_i, \qquad (1)$$

тегиздиктеги ийри сызык үчүн

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\left(x(\alpha_i^*), y(\alpha_i^*)\right)\Delta s_i. \qquad (2)$$

Эгерде ушул интегралдын суммаларынын пределдери δ нөлгө умтулганда аныкталса жана ал предел $[\alpha, \beta]$ аралыгын кандай жол менен майда $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ аралыктарга бөлүүдөн жана ар бир бөлүктөн $\alpha_i^* i = \overline{1, n}$ чекитин тандап алуудан көз каранды болбосо, анда ал пределди L ийри сызыгы боюнча $f(M)$ функциясынан алынуучу биринчи типтеги ийри сызыктуу интеграл деп атайбыз.

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \int_L f(x, y, z) ds \tag{3}$$

жана

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \int_L f(x, y) ds. \tag{4}$$

Ийри сызыктуу интегралдарды дагы

$$(L)\int f(M)ds, \quad \int_{AB} f(M)ds, \quad \int_A^B f(M)ds, \quad (L)\int_A^B f(M)ds$$

түрүндөгү символдор менен белгилешет. Бул учурда $f(M)$ функциясын L ийри сызыгында интегралдануучу функция дейбиз. S болсо L ийри сызыгынын узундугу, ал эми ds элементардык жаанын узундугу.

Ушул биринчи типтеги ийри сызыктуу интегралга гана таандык болгон бир өзгөчөлүктү белгилей кетели. Алды жакта (1) же (2) сыяктуу интегралдык сумманы түзүүдө AB ийри сызыгынын бөлүктөрүн номерлөөнүн багыты эч кандай роль ойнобойт, б.а. эгерде AB ийри сызыгы туюк болбосо, анда AB менен BA ар кандай багытталган бир эле ийри сызык деп эсептесек,

$$\int_A^B f(M)ds = \int_B^A f(M)ds \tag{5}$$

орун алат, анткени жаанын ds узундугу, AB же BA багытынан көз каранды болбостон дайыма оң сан болот.

Демек, биринчи типтеги ийри сызыктуу интегралдын мааниси интегралдоонун багытынан көз каранды эмес. Бул болсо ийри сызыктын чегинин кайсынысы баштапкы, кайсынысы акыркы экендигинен көз каранды эмес.

§ 2. БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫН КАСИЕТТЕРИ

Биринчи типтеги ийри сызыктуу интегралдын касиеттери, анык интегралдын касиеттери сыяктуу эле, ийри сызыктуу интегралдын аныктамасынан келип чыгат.

1^0. Эгерде $k-const$ болуп, $f(M)$ функциясы L сызыгында интегралдануучу функция болсо, анда $k\cdot f(M)$ дагы интегралдануучу болот да

$$\int_L kf(M)ds = k\int_L f(M)ds \tag{6}$$

барабардыгы орун алат.

○ Жогорку (3) же (4) аныктама боюнча төмөнкүдөй болот:

$$\int_L kf(M)ds = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(M_i)\Delta s_i = k\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i =$$

$$= k\int_L f(M)ds. \bullet$$

2^0. Эгерде $f_1(M)$ жана $f_2(M)$ функциялары L сызыгында интегралдануучу функциялар болушса, анда $f_1(M)+f_2(M)$ функциясы дагы интегралдануучу болот жана

$$\int_L [f_1(M)+f_2(M)]ds = \int_L f_1(M)ds + \int_L f_2(M)ds \tag{7}$$

барабардыгы орун алат.

○ $\int_L [f_1(M)+f_2(M)]ds = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(M_i)+f_2(M_i)]\Delta s_i =$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(M_i)\Delta s_i + \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(M_i)\Delta s_i = \int_L f_1(M)ds + \int_L f_2(M)ds. \quad \bullet$$

Бул касиеттерди интегралдын сызыктуу касиеттери дейбиз.

3^0. Эгерде $L = L_1 + L_2$ болгон эки бөлүктөн түзүлсө, анда

$$\int_L f(M)ds = \int_{L_1} f(M)ds + \int_{L_2} f(M)ds. \tag{8}$$

Бул касиет интегралдын аддитивдик касиети деп аталат. Мында оң жагындагы эки интеграл экөө тең бар болгон учурда гана сол жагындагы интеграл аныкталат.

$$\circ \ \sum\nolimits_L f(M_i)\Delta s_i = \sum\nolimits_{L_1} f(M_i)\Delta s_i + \sum\nolimits_{L_2} f(M_i)\Delta s_i,$$

мындан $\delta \to 0$ пределин алсак, анда

$$\int_L f(M)ds = \int_{L_1} f(M)ds + \int_{L_2} f(M)ds$$

барабардыгына ээ болобуз. $\bullet$

4^0. Эгерде $f(M) > 0$ болуп жана L сызыгында интегралдануучу функция болсо, анда дайыма

$$\int_L f(M)ds \geq 0$$

барабардыгы орун алат. Бул касиетти интегралдын монотондуулук касиети дейбиз.

$\circ$ Шарт боюнча

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \geq 0$$

анткени, бул суммадагы бардык кошулуучулар терс эмес: $f(M_i) \geq 0$ касиеттин шарты боюнча, ал эми жаачалардын Δs_i узундугу дайыма оң. Пределге өтсөк, анда

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i > 0 \text{ же } \int_L f(M)ds > 0.$$

Ушул эле сыяктуу, эгерде $f(M) \leqslant 0$ болсо, анда $\int_L f(M)ds < 0$ болорун далилдөөгө болот. ●

5^0. Эгерде L ийри сызыгынын бардык чекиттеринде $f_1(M) \leqslant f_2(M)$ болсо, анда

$$\int_L f_1(M)ds \leqslant \int_{L_2} f_2(M)ds \tag{9}$$

барабардыгы да орун алат.

○ Шарт боюнча L ийри сызыгында $f_1(M) \leqslant f_2(M)$ болгондуктан $f_2(M) - f_1(M) \geqslant 0$ барабарсыздыгы орун алат жана 4^0 касиеттен $\int_L [f_2(M) - f_1(M)]ds \geqslant 0$. Ал эми 2^0 касиет боюнча

$$\int_L [f_2(M)ds - f_1(M)]ds = \int_L f_2(M)ds - \int_L f_1(M)ds.$$

Мындан

$$\int_L f_2(M)ds - \int_L f_1(M)ds \geqslant 0 \text{ же } \int_L f_1(M)ds \leqslant \int_L f_2(M)ds. \ ●$$

6^0. Эгерде $m_1 \leqslant f(M) \leqslant m_2$ болсо, анда $m_1 s \leqslant \int_L f(M)ds \leqslant m_2 s$ барабардыгы орун алат.

○ Шарт боюнча m_2 — маани $f(M)$ функциясынын L сызыгындагы эң чоң мааниси болгондуктан, ошол эле L сызыгында $m_2 - f(M) \geqslant 0$ болот да 4^0 касиеттин негизинде

$\int_L [m_2 - f(M)]ds \geqslant 0$. Мындан 2^0 жана 1^0 касиетти эске алып,

$$m_2\int_L ds - \int_L f(M)ds \geqslant 0, \quad \int_L f(M)ds \leqslant m_2 s$$

барабарсыздыгын алабыз. Ушул сыяктуу, эгерде m_1 мааниси L сызыгындагы $f(M)$ функциясынын эң кичине мааниси болсо, анда

$$\int_L f(M)ds \geqslant m_1 s$$

барабарсыздыгын алууга болот. ●

7^0. Эгерде $f(M)$ функциясы L сызыгында интегралдануучу функция болсо, анда $|f(M)|$ функциясы дагы интегралдануучу функция болот да

$$\left|\int_L f(M)ds\right| \leqslant \int_L |f(M)|ds$$

барабарсыздыгы орун алат. Бул барабарсыздыкты, биринчи типтеги ийри сызыктуу интегралды абсолюттук чоңдугу боюнча чамалоо деп айтабыз.

8^0. Эгерде $f(M)$ функциясы L ийри сызыгында үзгүлтүксүз болсо, анда ал ийри сызыктан

$$\int_L f(M)ds = f(M^*)\cdot s \tag{10}$$

барабардыгы орун ала турган M* чекити табылат.

§ 3. БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫ ЭСЕПТӨӨ

1. Тегиздиктеги ийри сызык үчүн

Бизден

$$\int_L f(M)ds \tag{11}$$

ийри сызыктуу интегралын чыгарууну талап кылсын жана L ийри сызыгы параметрдин

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{12}$$

теңдемеси аркылуу берилсин. Мында $\varphi(t)$ жана $\psi(t)$ монотондуу жана t аргументи боюнча дифференцирленүүчү функция. Алдыңкы (11) интеграл интегралдык

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i \tag{13}$$

сумманын предели экендиги белгилүү. L ийри сызыгын майда жаачаларга бөлгөндөгү чекиттерге туура келген t параметринин маанилерин $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T$ (t_0 жана T параметрдин баштапкы жана акыркы маанилери) б.а. A жана B чекиттерине туура келген маанилер менен белгилейли. Анда ийри сызыктын жаасын эсептөө формуласын i-жаачага колдонсок,

$$\Delta s_i = \pm\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{14}$$

формуласын алабыз. Ушул Δs_i жаачасынын узундугун туюнткан чоңдук оң болуш үчүн интеграл алдына $\pm$ белгисин коёбуз. Буга биз жетише алабыз, эгерде жаанын өсүү багытына t параметринин чоңоюу багыты туура келсе, анда плюс белгини жана тескерисинче болсо — минус белгисин алуу керек. Эми (14) интегралына арадагы маани жөнүндөгү теореманы колдонсок,

$$\Delta s_i = \pm\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i \tag{15}$$

барабардыгына ээ болобуз, мында τ_i параметрдин кандайдыр бир мааниси жана $t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Интегралдык (13) суммада M_i чекити эркtүү түрдө алынгандыктан ар бир i-жаачалардагы алынуучу M_i чекитине параметрдин $t = \tau_i$ мааниси туура келгидей кылып алалы, б.а. M_i чекитинин координаты $x_i = \varphi(\tau_i)$, $y_i = \psi(\tau_i)$ болгудай кылып алабыз. Анда бул x_i, y_i жана Δs_i маанилерди (13) интегралдык суммага койсок,

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \pm\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i \tag{16}$$

формуласы келет. Ушул суммада $\delta = diam\left\{\max\limits_{1<i<n} \Delta s_i\right\} \to 0$, анда сөзсүз $\lambda = \max\limits_{1<i<n} \Delta t_i \to 0$. Ошентип, пределге өтсөк,

$$\int\limits_L f(M)ds = \pm\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \tag{17}$$

анда, оң жагында кадимки аныкталган интегралга ээ болобуз жана интегралдардын биринин бар болушу экинчисинин бар болушун камсыз кылат.

Эми ийри L сызыгы $y = \psi(x)$ теңдемеси менен берилсин жана ийри сызыктын четки чекиттери $A(x_1, y_1)$ жана $B(x_2, y_2)$ болсун. Анда (17) формулага параметр үчүн x өзгөрмө чоңдугун алып, ийри сызыктуу интегралды эсептөө үчүн

$$\int\limits_L f(M)ds = \pm\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, \psi(x))\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx \tag{18}$$

формуласына ээ болобуз.

Ушундай эле, эгерде L сызыгы $x = \varphi(y)$ теңдемеси аркылуу берилсе, анда

$$\int_L f(M)ds = \pm\int_{y_1}^{y_2} f(\varphi(y), y)\sqrt{[\varphi'(y)]^2 + 1}dy \qquad (19)$$

формуласын алабыз.

Эскертүү. Ушул (18) жана (19) формулаларды колдонгондо $\psi(x)$ жана $\varphi(y)$ функциялары монотондуу болушу жетиштүү, б.а. L ийри сызыгы ар кандай ox жана oy окторуна жарыш түз сызыктар менен бир гана чекитте кесилишсин. Эгерде бул шарт аткарылбаса, анда L ийри сызыгын айтылган шарт аткарыла тургандай кылып бөлүктөргө бөлүү зарыл. Андан кийин §2 деги 2^0 касиетти колдонсок, ар бир бөлүктөрдөгү аныкталган интегралдардын суммасы бардык L боюнча алынган ийри сызыктуу интегралдын маанисин берет.

1-мисал. Эгерде чокулары $A(1,2)$, $B(4,2)$, $C(4,4)$, $D(1,4)$ болгон тик бурчтуктун контуру болсо, L ийри сызыктуу $\int_L xyds$ интегралын чыгаргыла.

Δ § 2 деги 2^0 касиеттин негизинде, берилген ийри сызыктуу интегралды тик бурчтуктун жактары боюнча алынуучу интегралдардын суммасы катарында карайбыз.

$$\int_L xyds = \int_{AB} xyds + \int_{BC} xyds + \int_{CD} xyds + \int_{DA} xyds.$$

AB түз сызыгында $y=2$ деп жана A ны B ны көздөй жылдырсак, анда $ds = dx$; BC да $x=4$ жана $ds = dy$; CD да $y=4$ деп жана C ны D ны көздөй жылдырсак, мында S тин өсүндүсүнө x кемиши туура келет, ошондуктан $ds = -dx$; ушундай эле DA да $x = 1$ жана $ds = -dy$. Ошентип,

$$\int_L xyds = 2\int_1^4 xdx + 4\int_2^4 ydy - 4\int_4^1 xdx - \int_4^2 ydy = 75. \ \blacktriangle$$

2-мисал. L ийри сызыгы биринчи чейректеги $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипстин жаасы болгон учурда $\int_L yds$ ийри сызыктуу интегралын эсептегиле.

Δ Мында

$$ds = \pm\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \pm\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \pm\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,dt = \pm\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}\,dt = \pm c\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \cos^2 t}\,dt,$$

$c^2 = a^2 - b^2$ жана $\varepsilon = \frac{c}{a}$ эллипстин эксцентриситети. Интеграл алдындагы белги плюс болот, себеби эллипс боюнча $A(a, 0)$ чекитинен $B(0, b)$ чекитин көздөй жылганда t параметри 0 дөн $\frac{\pi}{2}$ ге чейин өсөт.

Ошентип,

$$\int_L yds = bc\int_0^{\pi/2}\sin t\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \cos^2 t}\,dt = -bc\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \cos^2 t}\,d(\cos t).$$

Бул интегралды чыгаруу үчүн

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + c \qquad (20)$$

формуласын колдонобуз, анда

$$\int_L yds = -\frac{bc}{2}\left[\cos t\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \cos^2 t} + \frac{1}{\varepsilon^2}\arcsin(\varepsilon\cos t)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{bc}{2\varepsilon^2}\left(\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arcsin\varepsilon\right). \blacktriangle$$

2. Мейкиндиктеги ийри сызык үчүн

Бул пунктта толук далилдөөлөрүнө токтолбостон, эгерде L ийри сызыгы мейкиндиктик болуп, ал

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{21}$$

параметрдик тендеме аркылуу берилсе, анда жаанын дифференциалы

$$ds = \pm\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt, \tag{22}$$

ал эми ийри сызыктуу

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_{AB} f(x, y, z)ds \tag{23}$$

интегралы (17) формула сыяктуу эле

$$\int\limits_L f(M)ds = \pm\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi(t)]^2}\,dt \tag{24}$$

формуласы аркылуу эсептелет. Мында t_0 жана T маанилери A жана B чекиттерине туура келүүчү параметрдин маанилери, ал эми интеграл алдындагы белги алдыңкы пункттагыдай эле жаанын өсүшүнө параметрдин өсүшү же кемиши дал келгидей кылып алынат.

Эгерде интегралдоо L ийри сызык эки беттин кесилүү сызыгы катарында берилсе, б.а. L сызыгынын теңдемеси

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

болсо, анда параметр үчүн x, y же z координаталарынын бирин алуу керек. (Берилген мисалда кайсы координатты алуу ачык көрүнөт.) Мисалы, параметр үчүн z алынса, анда (25) системаны x жана y ке карата чыгарып, L сызыгынын теңдемесин

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \tag{26}$$

түрүндө жазабыз. Анда жаанын дифференциалы (22) формула аркылуу

$$ds = \pm\sqrt{[\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2 + 1}\, dz$$

формуласы менен эсептелет. Мына ошентип, эгерде L сызыгынын четки чекиттери $A(x_1, y_1, z_1)$ жана $B(x_2, y_2, z_2)$ болсо, анда (23) ийри сызыктуу интегралын

$$\int\limits_L f(M)ds = \pm\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\varphi(z), \psi(z), z)\sqrt{[\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2 + 1}\, dz \qquad (27)$$

формуласы аркылуу эсептейбиз.

Ушундай эле, эгерде параметр үчүн x алынса, анда (25) системасын y жана z ке карата чыгарып, L ийри сызыгынын теңдемесин

$$y = \psi_1(x), \quad z = \chi_1(x) \qquad (28)$$

түрүндө жазып, бул учурда ийри сызыктуу интеграл

$$\int\limits_L f(M)ds = \pm\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, \psi_1(x), \chi_1(x))\sqrt{1 + [\psi_1'(x)]^2 + [\chi_1'(x)]^2}\, dx \qquad (29)$$

формуласы аркылуу эсептелет.

Акырында, эгерде параметр үчүн y алынса, анда L ийри сызыгынын теңдемеси

$$x = \varphi_2(y), \quad z = \chi_2(y)$$

түрүндө болуп, ийри сызыктуу интеграл үчүн

$$\int\limits_L f(M)ds = \pm\int\limits_{y_1}^{y_2} f(\varphi_2(y), y, \chi_2(y))\sqrt{[\varphi'(y)]^2 + 1 + [\chi'(y)]^2}\, dy \qquad (30)$$

формуласын алабыз.

1-мисал. L ийри сызыгы $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$ бурама сымал сызыктын биринчи орому болгон кезде $\int\limits_L (x+z)ds$ интегралын эсептегиле.

Δ Бул бурама сымал ийри сызыктын жаасынын өсүү багытына t параметринин 0 дөн 2π ге дейре өсүшү туура келет. Анда жаанын дифференциалы

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + h^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{R^2 + h^2}\,dt.$$

Ошондуктан

$$\int_L (x+z)ds = \sqrt{R^2+h^2}\int_0^{2\pi}(R\cos t + ht)dt = \sqrt{R^2+h^2}\Big(R\sin t +$$

$$+ \frac{ht^2}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 h\sqrt{R^2+h^2}. \ \blacktriangle$$

2-мисал. L ийри сызыгы биринчи октанта жаткан $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$ айлананын чейреги болсо, анда $\int_L (x + 2y)ds$ интегралын эсептегиле.

Δ Бул мисалда параметр үчүн x же y ти алуу ыңгайлуу. Биз x параметр деп эсептейли. Анда айлананын теңдемеси

$$y = x, \quad z = \sqrt{R^2 - 2x^2}$$

болот да, мындан төмөнкүлөр келип чыгат:

$$y'_x = 1, \quad z'_x = -\frac{2x}{\sqrt{R^2 - 2x^2}} \text{ жана}$$

$$ds = \sqrt{1 + y_x'^2 + z_x'^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2x^2}}.$$

Мында L сызыгынын четки чекиттери $A(0,\ 0,\ R)$ жана $B\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\ \frac{R}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ чекиттери болот (B чекити $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферасы менен $y = x$, $z = 0$ тегиздиктеринин кесилиш чекити). Ошондуктан

$$\int_L (x+2y)ds = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} 3x\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2-2x}}dx = -\frac{3\sqrt{2}R}{4}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}(R^2-2x^2)^{-\frac{1}{2}}d(R^2-2x^2) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}R}{2}\sqrt{R^2-2x^2}\Big|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}R^2}{2}. \blacktriangle$$

§ 4. БИРИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

1. Ийри сызыктын жаасынын узундугу

Эгерде $f(x,y)\equiv 1, \quad \forall M\in L = AB$ болсо, анда

$$l = \int_L ds \tag{31}$$

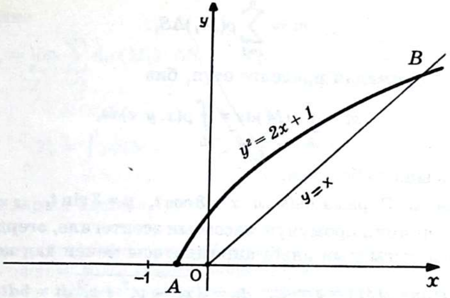
формуласы L ийри сызыгынын жаасынын узундугун берет.

Мисалы. $y^2 = 2x+1$ параболасынын абсцисса огу жана $y = x$ түз сызыгынын арасындагы, ox огунун үстүндө жаткан, AB бөлүгүнүн жаасынын узундугун тапкыла (70-чийме).

Δ Бул мисалда A чекити $x = -\frac{1}{2}, y = 0$, ал эми B чекитинин координатын парабола жана түз сызыктын теңдемелерин система катарында чыгарып, $x = y = 1+\sqrt{2}\approx 2{,}41$ ди табабыз. Изделген жаанын узундугун аныктоо үчүн (31) ди колдонобуз. Параболанын теңдемесинен y'_x туундуга караганда x'_y туундуну табуу оңой экендиги көрүнүп турат. Ошондуктан жаанын дифференциалын аныктоо үчүн

$$ds = \sqrt{1+x_y'^2}\,dy, \tag{32}$$

формуласын колдонуу ыңгайлуу. Анда $x = \frac{y^2-1}{2}$ жана $x'_y = y$. Демек, (31) жана (32) формулалар боюнча



70-чийме

$$l = \int\limits_{0}^{1+\sqrt{2}} \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left[y\sqrt{1+y^2} + \ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]_{0}^{1+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(6{,}30 + 1{,}62) \approx 4{,}0. \ \blacktriangle$$

2. Ийри сызыктын массасын эсептөө

Белгилүү бир массага ээ болгон мейкиндикте $L = AB$ ийри сызыгы берилип, анын бардык $M(x, y, z)$ чекиттериндеги $\rho(M)$ сызыктуу тыгыздыгы белгилүү болсун. Мына ушул L ийри сызыгынын бүткүл m массасын табуу талап кылынсын. Ал үчүн L ийри сызыгын n бөлүккө бөлүп, ар бир бөлүктөн өз эркибизче $M_i(x_i, y_i, z_i)$ чекиттерин тандап алып, бул чекитте-ги $\rho(M_i)$ тыгыздыгын эсептеп, A_iA_{i+1} бөлүгүнүн узундугун ΔS_i менен белгилеп, A_iA_{i+1} бөлүгүнүн бардык чекиттеринин тыгыздыгы ошол M_i чекитиндеги тыгыздык менен бирдей болсун деп болжолдоп, ошол бөлүктүн массасы үчүн $m_i \approx \rho(M_i)\Delta S_i$ формуласын алабыз. Ал эми бүткүл масса төмөнкүгө барабар:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta S_i. \tag{33}$$

Ушул суммадан пределге өтүп, биз

$$m = \int_L \rho(M)ds = \int_L \rho(x, y, z)ds, \tag{34}$$

формуласына ээ болобуз.

Мисалы. Бурама сымал $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ сызыктын биринчи оромунун массасын эсептегиле, эгерде ар бир чекиттеги тыгыздык анын аппликатасы менен дал келсе.

Δ Мында $\rho(M) = z = 4t$, $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = 5dt$, ал эми, t параметри 0 дөн 2π ге өсөт. Ошентип, (34) формула боюнча

$$m = \int_0^{2\pi} 4t \cdot 5dt = 40\pi^2 \approx 395. \blacktriangle$$

3. Ийри сызыктын статикалык моменти

Тегиздикте, ox жана oy окторуна карата, массалары m_1, m_2, …, m_n болушкан материалдык $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, … , $M_n(x_n, y_n)$ чекиттеринин системасынын статикалык моменттери

$$T_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad T_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{35}$$

формулалары аркылуу эсептелери белгилүү.

Эми биз тегиздиктеги материалдык ийри сызыктын жаасынын статикалык моменттерин аныктоо максатында, ал жааны n майда материалдык жаачаларга бөлүп, i-жаачасынын массасы анын $M_i(\xi_i, \eta_i)$ чекитине топтолгон деп болжолдоп, i-бөлүгүнүн статикалык моменти үчүн

$$\Delta T_{x_i} \approx h_i \Delta m_i, \quad \Delta T_{y_i} \approx \xi_i \Delta m_i, \tag{36}$$

барабардыгын жаза алабыз. Бул барабардыкка $\Delta m_i = \rho(M_i) \times$

$\times \Delta S_i$ маанини коюп, ийри сызыктын жаасынын статикалык моментине

$$T_x = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \rho(M_i) \cdot \Delta S_i, \qquad T_y = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(M_i) \cdot \Delta S_i,$$

же

$$T_x = \int_L y\rho(M)ds, \quad T_y = \int_L x\rho(M)ds \tag{37}$$

формулаларын алабыз.

Эскертүү. Эгерде бир тектүү ийри сызык кандайдыр бир түз сызыкка симметриялуу болсо (айрым учурда ox же oy огуна карата), анда анын ошол түз сызыкка карата болгон статикалык моменти нөлгө барабар болот.

Мейкиндиктеги ийри сызыктын жаасынын үч координаттык тегиздиктерге карата статикалык моменттери

$$T_{xy} = \int_L z\rho(M)ds; \quad T_{xz} = \int_L y\rho(M)ds; \quad T_{yz} = \int_L x\rho(M)ds \tag{38}$$

формулалары аркылуу аныкталат.

Эскертүү. Бир тектүү ийри сызыктын анын симметриялык тегиздигине карата статикалык моменти нөлгө барабар.

Мисалы. Бурама сымал бир тектүү $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ ийри сызыгынын биринчи оромунун $\rho(M) = 1$ болгондогу статикалык моменттерин координаталык тегиздиктерге карата аныктагыла.

Δ Мында

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{a^2 + h^2}\,dt,$$

болгондуктан

$$T_{xy} = \int_0^{2\pi} ht\sqrt{a^2+h^2}\,dt = 2\pi^2 h\sqrt{a^2+h^2};$$

$$T_{xz} = \int_0^{2\pi} a\sin t\sqrt{a^2+h^2}\,dt = 0; \quad T_{yz} = \int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+h^2}\,dt = 0. \ \blacktriangle$$

4. Ийри сызыктын оордук борбору

Координат окторго карата ийри сызыктын жаасынын статикалык моменттери табылган соң, ал ийри сызыктын оордук борборунун координаталары x_c жана y_c жеңил табылат.

$$mx_c = T_y, \qquad my_c = T_x.$$

Жогорудагы (34), (37) формулаларды эске алып, төмөнкүлөрдү табабыз:

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\rho(M)ds}{\int\limits_L \rho(M)ds}, \qquad y_c = \frac{\int\limits_L y\rho(M)ds}{\int\limits_L \rho(M)ds}. \tag{39}$$

Эгерде жалпак ийри сызык бир тектүү болсо, б.а. тыгыздык туруктуу болсо, анда (39) жөнөкөй түргө келет:

$$x_c = \frac{1}{l}\int\limits_L xds, \qquad y = \frac{1}{l}\int\limits_L yds. \tag{40}$$

Ушул эле сыяктуу мейкиндиктеги ийри сызык үчүн

$$mx_c = T_{yz}; \quad my_c = T_{xz}; \quad mz_c = T_{xy}$$

же (34) жана (38) эске алсак, анда мейкиндиктеги ийри сызыктын оордук борборунун координаталарын

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\rho(M)ds}{\int\limits_L \rho(M)ds}, \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\rho(M)ds}{\int\limits_L \rho(M)ds}, \quad z_c = \frac{\int\limits_L z\rho(M)ds}{\int\limits_L \rho(M)ds} \tag{41}$$

формулалары аркылуу аныктайбыз.

Айрым учурда, бир тектүү мейкиндиктик ийри сызык үчүн төмөнкүнү алабыз:

$$x_c = \frac{1}{l}\int\limits_L xds, \quad y = \frac{1}{l}\int\limits_L yds, \quad z_c = \frac{1}{l}\int\limits_L zds. \tag{42}$$

Эскертүү. Эгерде бир тектүү сызык кандайдыр бир түз сызыкка, тегиздикке же чекитке карата симметриялуу болсо, анда анын оордук борбору тийиштүү симметриялык түз сызыкта, тегиздикте же чекитте жатат. Бул (40) же (42) формулалардан жана бир тектүү сызыктардын статикалык моменттери нөлгө барабар болот деген жогорку эскертүүлөрдөн келип чыгат.

1-мисал. Биринчи чейректе жаткан, бир тектүү $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроиданын жаасынын оордук борборун тапкыла.

Δ Каралып жаткан астроиданын жаасы координаттык бурчтун биссектрисасына карата симметриялуу, анда алдыңкы эскертүү боюнча $x_c = y_c$. Дагы

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$$

болгондуктан

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 3a\sin t\cos t dt$$

ал эми биринчи чейректе жаткан астроиданын чекиттери үчүн t параметри 0 дөн $\frac{\pi}{2}$ ге чейин өзгөрөт.

Ошентип,

$$l = \int_L ds = 3a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2},$$

жана (40) формула боюнча

$$x_c = y_c = \frac{2}{3a}\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t dt = \frac{2a}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{5}a. \ \blacktriangle$$

2-мисал. Бурама сымал п.2 ги мисалда каралган ийри сызыгынын биринчи оромунун оордук борборунун координаталарын тапкыла.

$\blacktriangle$ Бул мисалды чыгаруу үчүн (41) формуланы колдонобуз. Ал формуланын бөлүмүн биз п.2 де чыгарганбыз $m = 40\pi^2$ жана $ds = 5t$.

Ошондуктан

$$\int_L x\rho(M)ds = \int_0^{2\pi} 3\cos t \cdot 4t \cdot 5dt = 60\left[t\sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt \right] = 0;$$

$$\int_L y\rho(M)ds = \int_0^{2\pi} 3\sin t \cdot 4t \cdot 5dt = 60\left[-t\cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt \right] = -120\pi;$$

$$\int_L z\rho(M)ds = \int_0^{2\pi} 4t \cdot 4t \cdot 5dt = \frac{80}{3} t^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{640}{3}\pi^3. \blacktriangle$$

Демек,

$$x_c = 0; \quad y_c = -\frac{120\pi}{40\pi^2} = -\frac{3}{\pi}; \quad z_c = -\frac{640\pi^3}{3 \cdot 40\pi^2} = \frac{16}{3}\pi. \quad \blacktriangle$$

§ 5. ЭКИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДАР

1. Экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралдын аныктамасы

Бөлүктүү-жылма $L \subset R^3$ ийри сызыгынын чекиттеринде $f(M) = f(x, y, z)$, $M \in L$ функциясы берилсин:

$$L = \{(x, y, z) / x = x(t), y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Биз $[\alpha, \beta]$ аралыгын өз эркибизче $t_k, k = \overline{1, n}$; $\delta = \max\limits_{1<k<n} \Delta t_k$ чекиттери аркылуу бөлүп, $x_k = x(t_k)$; $y_k = y(t_k)$; $z_k = z(t_k)$ маанилерин эсептейбиз. Анда элементардык жаачалардын ox, oy жана oz окторундагы проекцияларын $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$; $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$; $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$ деп белгилейли да $f(M)$ функциясынын x, y жана z үчүн L ийри сызыгы боюнча интегралдык суммаларын түзөбүз:

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \cdot \Delta x_k;$$

$$\sigma_y = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \cdot \Delta y_k,$$

$$\sigma_z = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \cdot \Delta z_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Мында (ξ_k, η_k, τ_k), z_k — чекити өз эркибизче $M_{k-1}M_k$, $M_{k-1} \sim t_{k-1}$, $M_k \sim t_k$ элементардык жаасынан алынган чекит. (71-чийме, тегиздик үчүн гана каралган.)

Эгерде $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_x$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_y$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_z$ пределдери бар болсо жана ал пределдер ийри сызыкты кандайча бөлүктөргө бөлүүдөн, ар бир бөлүктөрдөн чекитти тандап алуудан көз каранды болбосо, анда ал пределдерди L ийри сызыгы боюнча $f(M)$ функциясынан алынган экинчи тартиптеги ийри сызыктуу интеграл деп айтабыз жана

$$\int_L f(M)dx, \quad \int_L f(M)dy, \quad \int_L f(M)dz \tag{2}$$

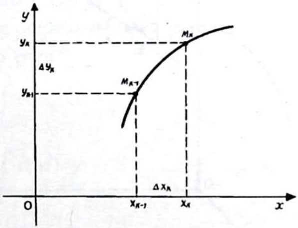
аркылуу белгилейбиз.

Эгерде L ийри сызыгынын боюнда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ жана $R(x, y, z)$ функциялары берилип, L сызыгы боюнча интегралданууучу болушса, анда

$$\int_L P(x, y, z)dx + \int_L Q(x, y, z)dy +$$

$$+ \int_L R(x, y, z)dz$$

туюнтмасын составдык интеграл же жалпы түрдөгү экинчи типтеги ийри сызыктуу интеграл деп айтабыз да



71-чийме

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{3}$$

түрүндө белгилейбиз.

2. Биринчи жана экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралдардын байланышы

Бизге бөлүктүү-жылма L ийри сызыгы R^3 мейкиндигинде берилип, анын кандайдыр бир М чекитине жаныма жүргүзөлү (ийри сызыктын ар бир чекитине жүргүзүлгөн жаныманын багыты ийри сызыктын өсүү багытына, б.а. A дан B га жылуучу багыт менен дал келсин). Ал жаныма менен координат октору аркылуу түзүлгөн бурчтар $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ (72-чийме) болсун. Анда

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha(M), \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\beta(M),$$

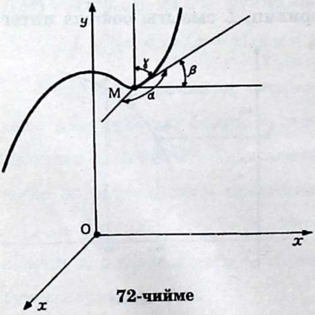
$$\frac{dz}{ds} = \cos\gamma(M). \tag{4}$$

Мындан,

$$dx = \cos\alpha(M)ds,$$

$$dy = \cos\beta(M)ds,$$

$$dz = \cos\gamma(M)ds.$$



72-чийме

Ошондуктан,

$$\int_L f(M)dx = \int_L f(M)\cos\alpha(M)ds;$$

$$\int_L f(M)dy = \int_L \cos\beta(M)f(M)ds;$$

$$\int_L f(M)dz =$$

$$= \int_L f(M)\cos\gamma(M)ds. \tag{5}$$

Ал эми (4) барабардыктарынан

$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha(M)} = \frac{dy}{\cos\beta(M)} = \frac{dz}{\cos\gamma(M)}$$

болгондуктан, биз

$$\int_L f(M)ds = \int_L \frac{f(M)}{\cos\alpha(M)}dx =$$

$$= \int_L \frac{f(M)}{\cos\beta(M)}dy = \int_L \frac{f(M)}{\cos\gamma(M)}dz \tag{6}$$

барабардыктарына ээ болобуз.

Ошентип, (5) барабардыкта экинчи типтеги ийри сызыктуу интеграл биринчи типтеги ийри сызыктуу интегралга келтирилди; ал эми (6) формулада тескерисинче биринчи типтеги интеграл экинчи типтеги интегралга келтирилди.

Экинчи жактан интегралдык (1) суммалардагы $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ ирети менен $x_{i+1} - x_i$, $y_{i+1} - y_i$, $z_{i+1} - z_i$ барабар экендиги бизге белгилүү жана алар ΔS_i нин проекциялары болгондуктан L ийри сызыгынын багытынан көз каранды, б.а. A дан B га же B дан A га карата багытталышына жараша бир учурда оң болушса, экинчи учурда терс белгиде болушат. Мына ошентип, экинчи типтеги интегралдар үчүн

$$\int_{AB} f(M)dx = -\int_{BA} f(M)dx;$$

$$\int_{AB} f(M)dy = -\int_{BA} f(M)dy;$$

$$\int_{AB} f(M)dz = -\int_{BA} f(M)dz$$

барабардыктары орун алышат. Атап айтканда, интегралдоочу $L = AB$ ийри сызыгынын багытын өзгөрткөндө экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралдын белгиси карама-каршысына өзгөрөт. Бул болсо, экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралдын биринчи типтеги интегралдан айырмачылыгын билгизет, бул айырмачылыкты экинчи типтеги интегралдын бир касиети деп кабыл алабыз. Ал эми төмөнкү касиеттерди оңой эле далилдөөгө болот:

1^0. Турактуу чоңдукту интеграл белгисинин сыртына чыгарууга болот;

2^0. Чектүү сандагы функциялардын алгебралык суммасы ал функциялардын интегралдарынын суммасына барабар;

3^0. Эгерде интегралдоо контур бир нече бөлүккө бөлүнсө, анда контур боюнча алынуучу интеграл ар бир бөлүк боюнча алынуучу интегралдардын суммасына барабар.

Ушул касиеттерден өз иретинде төмөнкүдөй жыйынтык келип чыгат.

а) Эгерде L — туюк интегралдоо контур болсо, анда экинчи типтеги интегралдын мааниси контурдан кайсы чекитти баштапкы чекит кылып алуудан көз каранды эмес.

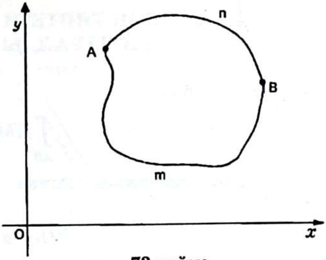
○ Биз туюк $AmBnA$ контурун карайлы (73-чийме). Анда 3^0 касиеттин негизинде

$$\int\limits_{AmBnA} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA} = \int\limits_{BnA} + \int\limits_{AmB} =$$

$$= \int\limits_{BnAmB} Pdx + Qdy + Rdz. \qquad \bullet$$

б) Ал эми D область (тегиздикте же бетте) туюк L контуру менен чектелсе жана ал бир нече бөлүккө бөлүнсө, анда L контуру боюнча алынган ийри сызыктуу интеграл ар бир бөлүктү чектеп турган контурлар боюнча алынуучу интегралдардын суммасына барабар болот, эгерде бардык контурлардын айлануусу бир багытта болсо.

◯ Каралган D областын L_1 жана L_2 контурлары менен чектелген D_1 жана D_2 бөлүккө бөлөлү (74-чийме).



73-чийме

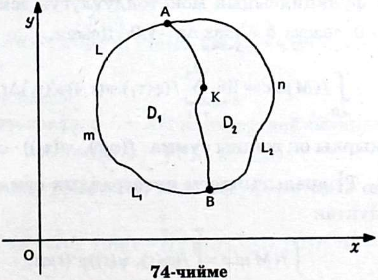
Анда 3^0 касиеттин негизинде

$$(L)\int\limits_{AmBnA} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA}$$

барабардыгын алабыз. Бул барабардыктын оң жагына $\int\limits_{BkA} + \int\limits_{AkB}$ суммасын кошобуз. Мында барабардык өзгөрбөйт, б.а. алардын мааниси нөлгө барабар. Ошентип,

$$(L)\int\limits_{AmBnA} = \left(\int\limits_{AmB} + \int\limits_{BkA}\right) + \left(\int\limits_{BnA} + \int\limits_{AkB}\right) = (L_1)\int\limits_{AmBkA} + (L_2)\int\limits_{AnBkA} . \bullet$$



74-чийме

§ 6. ЭКИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫ ЭСЕПТӨӨ

Адегенде биз

$$\int_{AB} f(M)dx, \tag{7}$$

интегралын эсептейли, мында $L = AB$ тегиздиктеги ийри сызык

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{8}$$

теңдемеси аркылуу берилсин, $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары монотондуу жана үзгүлтүксүз туундуга ээ болушсун, A, B чекиттерине t параметрдин t_0 жана T маанилери туура келсин. Анда аныктама боюнча

$$\int_{AB} f(M)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i y_i)\Delta x_i.$$

Чектүү өсүндү жөнүндөгү формула боюнча $\Delta x_i = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, $t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}$. Эми i-жаачадан M_i чекитин, параметр t нын мааниси τ_i болгудай кылып тандап алабыз, б.а. M_i чекитинин координаты $x_i = \varphi(\tau_i)$, $y_i = \psi(\tau_i)$ болушсун. Ушул аныкталган x_i, y_i жана Δx_i маанилерди интегралдык суммага коюп жана $\varphi(t)$ функциясынын монотондуулугун эске алсак, анда $\max\limits_{1<i<n} \Delta x_i \to 0$ сөзсүз $\delta = \max\limits_{1<i<n} \Delta t_i \to 0$. Демек,

$$\int_{AB} f(M)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Бул акыркы оң жакκы сумма $f(\varphi(t),\ \psi(\tau_i))\cdot\varphi'(t)$ функциясынын $[t_0, T]$ аралыгындагы интегралдык суммасы болот.

Ошондуктан

$$\int_{AB} f(M)dx = \int_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t)dt. \tag{9}$$

Ушул сыяктуу

$$\int_{AB} f(M)dy = \int_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt \qquad (10)$$

жана

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{t_0}^{T}\left[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\right]dt \qquad (11)$$

формулаларына ээ болобуз.

Демек, (7) ийри сызыктуу интегралын эсептөө үчүн интеграл алдындагы функцияда x жана y өзгөрмөлөрүн, алардын параметр аркылуу берилген (8) туюнтмалары менен алмаштырып, ал эми dx көбөйтүүчүсүн x өзгөрмөсүнүн t параметри боюнча дифференциалы менен алмаштыруу керек.

Эгерде интегралдоо контурунун теңдемеси

$$y = \psi(x) \text{ же } x = \varphi(y)$$

түрүндө берилсе, ал эми анын границалык чекити $A(x_1, y_1)$ жана $B(x_2, y_2)$ болсо, анда параметр үчүн биринчисинде x ти, экинчисинде у ти алсак, (11) формуладан

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x))\psi'(x)\right]dx \qquad (12)$$

жана

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[P(\varphi(y), y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y)\right]dy \qquad (13)$$

формуласын алабыз.

Эгерде интегралдоо $L = AB$ контуру мейкиндикте

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (14)$$

теңдемеси аркылуу берилсе, анда (11) формулага окшош эле

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{t_0}^{T}\left[P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + \right.$$

$$+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\big]dt \qquad (15)$$

формуласын алууга болот.

Ал эми ийри сызык

$$F_1(x,y,z)=0, \quad F_2(x,y,z)=0 \qquad (16)$$

теңдемеси менен берилип, границалык чекиттери $A(x_1,y_1,z_1)$ жана $B(x_2,y_2,z_2)$ болсо, анда координаттын бирин параметр катарында кароо ыңгайлуу. Мисалы, параметр катарында аппликата z алуу ылайык болсо, анда (16) системасын x, y ке карата эсептеп

$$x=\varphi(z), \quad y=\psi(z)$$

маанилерди алабыз да экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралды чыгаруу үчүн (15) формула

$$\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{z_1}^{z_2}\big[P(\varphi(z),\psi(z),z)\varphi'(z)+$$

$$+Q(\varphi(z),\psi(z),z)\psi'(z)+R(\varphi(z),\psi(z),z)\big]dz \qquad (17)$$

түрүндө жазылат.

1-мисал. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ боюнча $A(a,\ 0)$ чекитинен $B\,(0,\ b)$ чекитине чейин

$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy \qquad (18)$$

экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралын эсептегиле.

Δ Бул мисалды эки жол менен эсептейли:

а) Адегенде (11) формуласын колдонолу. Ал үчүн эллипстин теңдемесин параметрдик түрдө жазалы:

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t.$$

Мындан

$$x'_t=-a\sin t, \quad y'_t=b\cos t.$$

A чекитине $t = 0$, В чекитине $t = \frac{\pi}{2}$ маанилер туура келет. Ошондуктан

$$\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_0^{\pi/2} \left[a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)(-a \sin t) + \right.$$

$$\left. + (a^2 \cos^2 t - b^2 \sin^2 t) b \cos t\right] dt = -a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt -$$

$$- ab^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt + a^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt - b^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} + ab^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) + a^2 b \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) -$$

$$- \frac{b^3}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{a^3}{3} + ab^2 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)_0^{\pi/2} + a^2 b \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)_0^{\pi/2} -$$

$$- \frac{b^3}{3} = -\frac{a^3 + b^3}{3} - \frac{2}{3} ab^2 + \frac{2}{3} a^2 b = \frac{1}{3}\left[2ab(a - b) - (a^3 + b^3\right].$$

б) Эми (18) интегралды сумма катарында

$$\int_L (x^2 + y^2)dx + \int_L (x^2 - y^2)dy$$

жазып алалы да биринчи интегралга интегралдоо өзгөрмө чоңдукту x, ал эми экинчисине y болсун деп эсептеп, эллипстин теңдемесинен

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

маанилерди аныктап, ордуна койсок, анда

$$\int_L (x^2+y^2)dx+\int_L (x^2-y^2)dy=\int_a^0\left[x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]dx+$$

$$+\int_0^b\left[a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-y^2\right]dy=\left[\frac{x^3}{3}+b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\right]_a^0+$$

$$+\left[a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)-\frac{y^2}{3}\right]_0^b=-\frac{1}{3}(a^3+2ab^2+$$

$$+\frac{1}{3}\left(2a^2b-b^3\right)=\frac{1}{3}\left[2ab(a-b)-(a^3+b^3)\right].$$

Мындан биз экинчи жол (18) түрдөгү мисалды тезирээк максатка жеткирерин көрдүк. ▲

2-мисал. Эгерде L $z=x^2+y^2$ параболоидасы менен $x+y=1$ тегиздигинин кесилиш сызыгы болсо,

$$\int_L (x+y+z)(dx+dy+dz)$$

интегралын $A(1,\ 0,\ 1)$ чекитинен $B(0,\ 1,\ 1)$ чекитине чейин эсептегиле.

△ L ийри сызыгынын теңдемесинен

$$y=1-x \text{ жана } z=x^2+(1-x)^2,\quad z=2x^2-2x+1$$

алабыз, анда

$$dy=-dx \text{ жана } dz=(4x-2)dx.$$

Демек,

$$\int_L (x+y+z)(dx+dy+dz)=$$

$$=\int_1^0 (x+1-x+2x^2-2x+1)(1-1+4x-2)dx=$$

$$=4\int_1^0 (x^2-x+1)(2x-1)dx=4\int_1^0 (2x^3-3x^2+3x-1)dx=$$

$$=4\left(\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{3x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^0=0.\ ▲$$

§ 7. ГРИНДИН ФОРМУЛАСЫ

Биз бул параграфта кандайдыр бир D областы боюнча алынуучу кош интеграл менен ошол D областынын чектеп турган туюк L контуру боюнча алынуучу экинчи типтеги ийри сызыктуу интегралды байланыштырган Гриндин формуласы деп аталуучу формуланы далилдейбиз.

Ал үчүн $L = AmBnA$ (75-чийме) ийри сызыгын ox жана oy окторуна жарыш түз сызыктар экиден ашпаган чекитте кесип өтсүн деп, контурдун AmB жана AnB бөлүктөрүнүн теңдемесин $y = \varphi_1(x)$ жана $y = \varphi_2(x)$ түрүндө жазалы.

Эми D областында эки $P(x,y)$ жана $Q(x,y)$ функциялар берилип, алар үзгүлтүксүз айрым туундуларга ээ болушсун. Биз

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

кош интегралын эсептейли.

Кош интегралдын, ийри сызыктуу жана анык интегралдардын касиеттерине жана эсептөөлөрүнө таянып эсептейбиз:

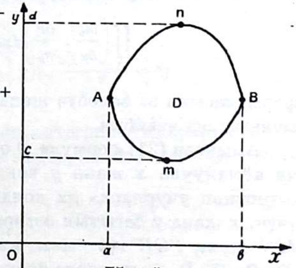
$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Bigg|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \int\limits_a^b \Big[P(x,\varphi_2(x)) -$$

$$- P(x,\varphi_1(x))\Big]dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx -$$

$$- \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx +$$

$$+ \int\limits_b^a P(x,\varphi_1(x))dx = \int\limits_{AnB}\Big[P(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_{BmA} P(x,y)dx = \int\limits_{AnBmA} Pdx = -\int\limits_L Pdx.$$



75-чийме

Ошентип,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_L Pdx. \qquad (19)$$

Ушул эле сыяктуу, эгерде контурдун mAn жана mBn бөлүктөрүнүн теңдемеси

$$x = \psi_1(y) \text{ жана } \quad x = \psi_2(y)$$

болсо, анда

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx = \int_c^d Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy =$$

$$= \int_c^d \left[Q(\psi_2(y)) - Q(\psi_1(y),y)\right]dy = \int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy +$$

$$+ \int_d^c Q(\psi_1(y),y)dy = \int_{mBn} Q(x,y)dy + \int_{nAm} Q(x,y)dy = \int_{mBnAm} Qdy$$

же

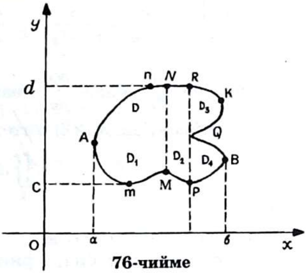
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y}dxdy = \int_L Qdy. \qquad (20)$$

Ушул (20) барабардыктан (19) барабардыгын кемитип, биз

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_L Pdx + Qdy \qquad (21)$$

формуласына ээ болобуз жана бул формуланы Гриндин формуласы деп атайбыз.

Алынган (21) формула D областын чектеген контур боюнча айланууда x жана y чектүү жолу өзүлөрүнүн багытын өзгөрткөн учурларда да колдонууга болот. Ушуну көрсөтүү үчүн, x жана y багытын өзгөрткөн чекиттен oy огуна жарыш MN жана PQR түз сызыгын жүргүзөлү. Анда D областы D_1, D_2, D_3, D_4 бөлүктөргө бөлүнүп, жогоруда көрсөтүлгөн контур менен чектелишет. Ар бир бөлүктө (21) формуласын колдонобуз, б.а.



76-чийме

$$\iint_{D_1} = \int_{NnAmM} + \int_{MN},$$

$$\iint_{D_2} = \int_{NM} + \int_{MP} + \int_{PQP} + \int_{RN},$$

$$\iint_{D_3} = \int_{RQ} + \int_{QKR},$$

$$\iint_{D_4} = \int_{QP} + \int_{PBQ}$$

(оңой чыгарылыш үчүн интеграл алдындагы туюнтма жазылган жок). Алынган төрт барабардыктын оң жана сол жактарын кошуп,

$$\int_{MN} + \int_{NM} = 0 \text{ жана } \int_{PQP} + \int_{RQ} + \int_{QP} = 0$$

эске алсак, анда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{NnAmM} + \int_{MP} + \int_{PBQ} + \int_{QKR} + \int_{RN} = \int_L Pdx + Qdy.$$

Демек, мындай учурда (21) формула сакталат.

1-мисал.

$$\int_L arctg(xy)dx + \left[x + \frac{\ln(1 + x^2y^2)}{2y^2}\right]dy \qquad (22)$$

ийри сызыктуу интегралын кош интегралга келтиргиле.

Δ Бул (22) ийри сызыктуу интеграл (21) формуланын оң жагын берет, бул учурда

$$P = arctg(xy), \quad Q = x + \frac{\ln(1 + x^2y^2)}{2y^2}$$

деп белгиленет. Мындан

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2 y^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \frac{x}{1 + x^2 y^2}.$$

Алынган $\frac{\partial P}{\partial y}$ жана $\frac{\partial Q}{\partial x}$ маанилерди (21) формуланын сол жагына койсок, анда (22) интегралы

$$\iint_D dxdy \tag{23}$$

кош интегралына келет. ▲

Ушул мисалдан биз, Гриндин формуласын колдонууда ийри сызыктуу интегралды эсептөө, көпчүлүк учурда жеңил болуп каларын көрдүк. Бул жыйынтык (23) кош интегралдын алдындагы туюнтма (22) ийри сызыктуу интегралга караганда өтө жөнөкөй болгондугунан келип чыкты.

2-мисал. Эгерде L контуру, чокулары A (1, 1), B (3, 1) жана C (2, 2) чекиттери болгон үч бурчтуктун оң багыты болгон учурда

$$\int_L (x + 5y)dx - (5x + 3y)dy \tag{24}$$

ийри сызыктуу интегралын түздөн-түз жана кош интегралга келтирип чыгаргыла.

△ Түздөн-түз чыгарылыш үчүн (24) интегралды үч бурчтуктун жактары боюнча, сумма түрүндө карайбыз:

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}.$$

Мында AB жагынын теңдемеси $y = 1$; $BC - y = 4 - x$; $AC - - y = x$.

Ошондуктан,

$$\int_{AB} = \int_1^3 (x + 5)dx = 14;$$

$$\int_{BC} = \int_3^2 [x + 5(4 - x) + 5x + 3(4 - x)]dx = -27;$$

$$\int_{CA} = \int_2^1 (x + 5x - 5x - 3x)dx = 3.$$

Анда (24) интегралдын мааниси — 10го барабар болот.

Эми (24) интегралды (21) формуланы колдонуп кош интегралга келтиребиз. Ал үчүн

$$P = x + 5y, \quad Q = -(5x + 3y).$$

Анда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 5, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -5$$

жана (21) формула боюнча

$$-10\iint_D dxdy \text{ ке} \tag{25}$$

ээ болобуз. D—ABC үч бурчтугунун аянты. Алынган (25) кош интегралды жогорудагы AC жана BC жактарынын теңдемесин билип, эсептеп

$$-10\iint_D dxdy = -10\int_1^2 dy \int_y^{4-y} dx = -10\int_1^2 (4 - 2y)dy = -10$$

мурунку эле мааниге ээ болобуз.

§ 8. ЭКИНЧИ ТИПТЕГИ ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫН КОЛДОНУЛУШУ

1. Жалпак фигуранын аянтын эсептөө

Жалпак фигуранын аянты анык интеграл жана кош интеграл аркылуу эсептелери белгилүү. Эми биз (21) Гриндин формуласын колдонуп, ийри сызыктуу интеграл аркылуу эсептейли. Ал үчүн (21) формуладагы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$$

болгудай кылып тандап алсак, анда (21) формуладагы кош интеграл D областынын аянтын берет. Демек, анда ал аянт ийри сызыктуу интеграл аркылуу туюнтулат.

$P(x,y)=0, \quad Q(x,y)=x$ болсо, анда аянт

$$S=\int_L xdy,$$

ал эми $Q(x,y)=0, \quad P(x,y)=-y$ десек,

$$S=-\int_L ydx$$

же болбосо $Q(x,y)=\frac{x}{2}, \quad P(x,y)=\frac{y}{2}$ болсо, анда аянт

$$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx \tag{26}$$

ийри сызыктуу интегралы аркылуу туюнтулат.

Мисалы. Чокулары A (0, 2), B (5, 5), C (3, 1) болгон үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Δ Бул үч бурчтуктун AB, BC жана AC жактарынын теңдемелери $y=\frac{3}{5}x+2; \quad x=2x-5; \quad y=2-\frac{x}{3}$. Ошондуктан AB да $dy=\frac{3}{5}dx$; BC да $dy=2dx$ жана AC да $dy=-\frac{1}{3}dx$. Анда (26) формула боюнча, эгерде контурду айлануу оң багытта болсо,

$$S=\frac{1}{2}\left(\int_{BA} xdy-ydx+\int_{AC} xdy-ydx+\int_{CB} xdy-ydx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_5^0\left[x\cdot\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{5}x+2\right)\right]dx+\int_0^3\left[x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{x}{3}\right)\right]dx+\right.$$

$$\left.+\int_3^5\left[x\cdot 2-(2x-5)\right]dx\right)=7.\blacktriangle$$

2. Жумушту эсептөө

Бирдик массалуу материалдык чекит, $F = F(M)$ күчтүн таасири аркылуу L ийри сызыгы боюнча жылсын. Эми биз ушул жылдыруудагы $F=F(M)$ күчүнүн аткарган жумушун эсептейли. Ушул максатта L ийри сызыгын n элементардык жаачаларга бөлөбүз. Анда $F(M_i)\cdot\Delta s_i$ скалярдык көбөйтүндү i-жаачадагы аткарылган жумуштун болжолдуу мааниси болот:

$$\Delta A_i \approx F(M_i)\cdot\Delta s_i,$$

мында $M_i - i$ — жаачадан өз эркибизче алынган чекит, ал эми Δs_i ошол i-жаачаны керип турган хордага дал келген вектор. Бул векторду чекиттин жылуу жагына багыттайбыз. Вектор $F(M)$ күчүнүн координат окторундагы проекциясын $P(M)$, $Q(M)$ жана $R(M)$ менен, ал эми Δs_i векторунун проекциясын Δx_i, Δy_i, Δz_i менен белгилейли. Анда

$$\Delta A_i \approx P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\cdot\Delta y_i + R(M_i)\cdot\Delta z_i. \tag{27}$$

Бардык жумуш

$$A = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\underset{(\Delta x=\max\Delta x_i,\ \Delta y=\max\Delta y_i,\ \Delta z=\max\Delta z_i)}{\left[P(M_i)\cdot\Delta x_i + Q(M_i)\cdot\Delta y_i + R(M_i)\cdot\Delta z_i\right]} \tag{28}$$

же

$$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz. \tag{29}$$

Эгерде чекит жылуучу L ийри сызыгы xoy тегиздигинде болсо, анда аткарылган жумуш

$$A = \int_L Pdx + Qdy \tag{30}$$

формуласы аркылуу эсептелет. Бул формуланын (29) формуласынан айырмасы P жана Q проекциялар эки гана x, y өзгөрмөлөрүнөн функция. Акырында, эгерде материалдык чекит m

массага ээ болсо, анда (29) жана (30) формулаларына m көбөйтүүчүсүн киргизүү зарыл.

Мисалы. $\vec{F}(M) = (x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + 2xy\vec{i} + (x + y + z)\vec{k}$ күчү массасы $m = 2$ болгон чекитти, бурама сымал $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3t$ сызыгы аркылуу бир оромго жылдырат. Ушул жылдыруудагы жумушту эсептегиле.

Δ Жогорку (29) формула боюнча

$$A = 2\int_L (x^2 + y^2 + z^2)dx + 2xydy + (x + y + z)dz$$

же

$$A = \int_0^{2\pi} \Big[(4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 9t^2)(-2\sin t) + 2 \cdot 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t +$$

$$+ (2\cos t + 2\sin t + 3t) \cdot 3\Big]dt =$$

$$= -4\int_0^{2\pi} (4 + 9t^2)\sin t dt + 32\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt +$$

$$+ 6\int_0^{2\pi} 2\cos t + 2\sin t + 3t)dt.$$

Биринчи интегралга бөлүктөп интегралдоо методун эки ирет колдонуп, эсептесек,

$$A = 144\pi^2 + \left(-\frac{32}{3}\cos^3 t + 12\sin t - 12\cos t + 9t^2\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 180\pi^2 \approx 1777$$

жыйынтыгын алабыз. ▲

§ 9. ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫН ИНТЕГРАЛДОО ЖОЛУНАН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛБОСТУГУ

Адегенде биз

$$\int_{OA} 3x^2 y dx - x^3 dy, \tag{31}$$

ийри сызыктуу интегралынын маанисин $O(0, 0)$ координат башталмасынан $A(2, 4)$ чекитине чейин ар түрдүү интегралдоо контуру боюнча эсептейли. Ал контур $y = 2x$ түз сызыгы, андан кийин $y = x^2$ параболасы болсун. Биз $y = 2x$ түз сызыгы боюнча интегралдайлы, анда (31) интегралы

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot 2x - x^3 \cdot 2) dx = 4\int_0^2 x^3 dx = 16.$$

Эми $y = x^2$ параболасы боюнча интегралдайлы,

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot x^2 - x^3 \cdot 2x) dx = \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}.$$

Дагы бир

$$\int_{OA} 3x^2 y dx + x^3 dy, \tag{32}$$

интегралын ошол эле $y = 2x$ жана $y = x^2$ сызыктары боюнча интегралдайлы. Интегралдоо жолу $y = 2x$ түз сызык болгон учурда (32) интегралы төмөнкүдөй болот:

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot 2x + x^3 \cdot 2) dx = 8\int_0^2 x^3 dx = 32,$$

ал эми $y = x^2$ парабола боюнча

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x) dx = 5\int_0^2 x^4 dx = 32.$$

Бул мисалдардан биз ийри сызыктуу интегралдын, интегралдоо жолун өзгөрткөндө, интегралдын мааниси кээде өзгөрүп, кээде өзгөрбөстүгүн көрдүк. Ошондуктан кандай шарттар орун алган учурда, ийри сызыктуу интеграл интеграл алдындагы туюнтмалардан жана ошондой эле баштапкы жана кийинки чекиттеринин абалынан көз каранды болорун, ал эми интегралдоо жолунан (контурунан) көз каранды эместигин, б.а. интегралдоо жолун өзгөрткөндө интеграл маанисин өзгөртпөгөндүгүн көрсөтөлү. Ушул маселени чечүү максатында төмөнкү лемманы далилдейбиз.

ЛЕММА. Ар кандай туюк ийри сызык боюнча алынуучу ийри сызыктуу интегралдын интегралдоо жолунан көз каранды болбостугу, ал интегралдын нөлгө барабар болушуна тең күчтүү.

○ Бизге ийри сызыктуу

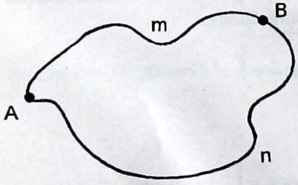
$$\int_L Pdx + Qdy, \tag{33}$$

берилсин жана ал интегралдоо жолунан көз каранды болсун. Ушул (33) интегралдын ар кандай туюк ийри сызык боюнча алынган мааниси нөл экендигин далилдейбиз. Ал үчүн тегиздиктен өз эркибизче эки A жана B чекиттерди алып (77-чийме), ал чекиттерди өз эркибизче эки AmB жана AnB ийри сызыктар менен туташтырабыз.

Ал эми (33) интеграл интегралдоо жолунан көз каранды болбогондуктан

$$\int_{AmB} = \int_{AnB}, \text{ же}$$

$$\int_{AmB} - \int_{AnB} = 0.$$



77-чийме

Экинчи интегралдын интегралдоо багытын өзгөртүп,

$$\int_{AmB} + \int_{BnA} = 0 \quad \text{же} \quad \int_{AmBnA} Pdx + Qdy = 0,$$

(33) интегралдын мааниси нөл экендигин алабыз, мында $AmBnA$ — эрктүү алынган туюк контур, себеби A жана B, ошондой эле AmB жана AnB сызыктары эрктүү түрдө алынган.

Эми биз тескери жыйынтыктын да туура экендигин көрсөтөлү. Ар кандай эрктүү түрдө алынган туюк $AmBnA$ ийри сызык (77-чийме) боюнча алынган (33) интеграл нөлгө барабар болсун, же

$$\int_{AmB} + \int_{BnA} = 0.$$

Мындан

$$\int_{AmB} = -\int_{BnA} \quad \text{же} \quad \int_{AmB} = \int_{AnB},$$

б.а. (33) интеграл интегралдоо жолунан көз каранды эмес.

Теорема. *P жана Q функциялары, ошондой эле алардын айрым туундулары, L контурунун ички чекиттеринде үзгүлтүксүз болушсун. Анда (33) интеграл интегралдоо жолунан көз каранды болбос үчүн*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{34}$$

барабардыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ **Зарыл шарты.** Бизге (33) берилип, ал интегралдоо жолунан көз каранды болбосун деп (34) барабардыктын орун алышын далилдейли.

Леммадан, ар кандай туюк L контуру боюнча алынган (33) интеграл нөлгө барабар. Анда Гриндин (21) формуласы боюнча

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0. \tag{35}$$

Мында D эрктүү түрдө алынган область. Ушул D область эрктүү түрдө алынгандыктан, (35) барабардыгынан интеграл алдындагы функция дагы нөлгө барабар экендиги келип чыгат, б.а. (34) бирдейлик орун алат.

Чындыгында эле тескери маселени карайлы, б.а. (34) бирдейлик орун албаган $M(x_0, y_0)$ чекити табылсын. Ушул чекитте, мисалы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0. \tag{36}$$

Анда, айрым туундулар үзгүлтүксүз болушкандыктан, бардык чекиттерде (36) аткарылгандай кылып, M_0 чекитинин D_0 аймагын түзөбүз жана кош интегралдын касиети боюнча

$$\iint_{D_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > 0.$$

Бирок бул барабарсыздык ар кандай областта аткарыла турган (35) барабардыгына каршы. Ошондуктан (34) барабардык xoy тегиздигинин бардык чекиттеринде аткарылат.

Жетиштүү шарты. Эми (34) бирдейлик аткарылсын деп, (33) интегралдын интегралдоо жолунан көз каранды болбостугун далилдейли. Чындыгында эле, (34) бирдейлигинен (35) барабардыгы келип чыгат, ал эми акыркысынан, өз иретинде Гриндин (21) формуласы боюнча ар кандай туюк контур боюнча алынуучу (33) интегралдын нөлгө барабар болушу келет. Демек, лемма боюнча (33) интеграл интегралдоо жолунан көз каранды эмес. ●

Эскертүү. Ушул (33) интегралдагы P жана Q функциялардын үзгүлтүксүз болушун талап кылуу эң олуттуу. Эгерде бул шарт аткарылбаса, анда теореманын шарты да аткарылбайт. Муну мисал менен көрсөтөлү:

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \tag{37}$$

интегралын алалы, мында L борбору координат башталмасында жаткан, радиусу R болгон айлана болот жана оң багытта алынат.

Бул мисалда

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{жана} \quad Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}. \tag{38}$$

Анда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Эми (37) интегралдын маанисин эсептейли. Айлананын параметрдик теңдемеси

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

болгондуктан $dx = -R\sin t dt, \quad dy = R\cos t dt$
жана интеграл (37)

$$\int_0^{2\pi} \frac{-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\,dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Мына ошентип, (34) шарт (37) интеграл үчүн орун алса деле, туюк контур (айлана) боюнча алынган ал интеграл нөлгө барабар болбой калды, ошондуктан лемма боюнча ал интегралдоо жолунан көз каранды. Теореманын шарттары (37) интегралга аткарылган жок, себеби P жана Q (38) функциялар L айланасынын ичинде (координат башталмасында) үзгүлтүксүздүгүн жоготот.

Эми бизге

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz \tag{39}$$

интегралы берилсин, мында P, Q, R функциялары жана алардын x, y жана z боюнча алынган туундулары үзгүлтүксүз болсун.

Ушул (39) интеграл интегралдоо жолунан көз каранды болбос үчүн

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{40}$$

барабардыктарынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Мисалы.

$$\int_L \left(x^2 + \frac{1}{y} + 2z^2\right)dx + \left(3 - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)dy + \left(4xz - \frac{y}{z^2}\right)dz \qquad (41)$$

интегралынын интегралдоо жолунан көз каранды боло тургандыгын көрсөткүлө.

Δ Берилген (41) интегралда

$$P = x^2 + \frac{1}{y} + 2z^2; \quad Q = \left(3 - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right); \quad R = \left(4xz - \frac{y}{z^2}\right).$$

Анда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4z, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2},$$

б.а. (40) барабардык орун алат жана (41) интегралы интегралдоо жолунан көз каранды эмес.

§ 10. ТОЛУК ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ БОЮНЧА ФУНКЦИЯНЫ АНЫКТОО

Аныктама. *Эгерде $du = Pdx + Qdy$ барабардыгы аткарылса, анда $U(x,y)$ функциясын $Pdx + Qdy$ туюнтмасынын баштапкы функциясы деп атайбыз.*

Теорема (баштапкы функциянын бар болушу жөнүндө). *P жана Q функциялары жана алардын айрым туундулары үзгүлтүксүз болгон*

$$Pdx + Qy \qquad (42)$$

туюнтмасы баштапкы функцияга ээ болуш үчүн

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (43)$$

барабардыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

О Зарыл шарты. Бизге (42) туюнтма берилип, ал $U_1(x,y)$ баштапкы функцияга ээ болсун, б.а.

$$du_1 = Pdx + Qdy \tag{44}$$

барабардыгы берилсин. Анда (43) барабардыгынын аткарылышын далилдейбиз. Ар кандай дифференцирленүүчү $U_1(x,y)$ функция үчүн

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}dx + \frac{\partial u_1}{\partial y}dy \tag{45}$$

формуласы орун алат.

Эми (44) жана (45) ди салыштырып,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}dx + \frac{\partial u_1}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

барабардыгына ээ болобуз. Мында dx жана dy эрктүү түрдө алынган чоңдуктар болгондуктан, акыркы барабардыкка адегенде $dy = 0$, андан кийин $dx = 0$ деп

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = Q \tag{46}$$

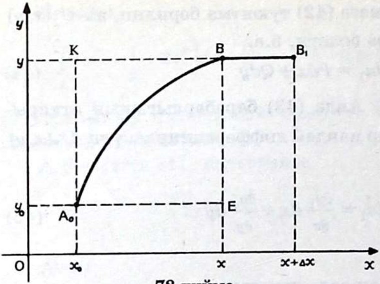
барабардыгын алабыз. Ушул (46) барабардыктын биринчисин y боюнча, экинчисин x боюнча дифференцирлесек,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} \tag{47}$$

барабардыгы келип чыгат.

Шарт боюнча $\frac{\partial P}{\partial y}$ жана $\frac{\partial Q}{\partial x}$ үзгүлтүксүз болушкандыктан (47) барабардыктан экинчи тартиптеги туундулардын үзгүлтүксүздүгү келип чыгат. Ал эми аралаш туундулар үзгүлтүксүз болушса, анда алар барабар, б.а. (47) барабардыктын оң жактары барабар, анда сол жактары да барабар. Ошентип, (43) барабардыктын орун алышын далилдедик.

Жетиштүү шарты. (43) шарт орун алсын деп (42) туюнтманын баштапкы функцияга ээ болорун, б.а. $U_1(x,y)$ функция-



78-чийме

сы табылып, ага (43) барабардыктын аткарылышын далилдейли. Жогору жакта (44) жана (46) барабардыктары тең күчтө экендиги далилденди. Ошондуктан (44) барабардыгын канааттандыруучу $U_1(x, y)$ функциясынын бар болушун далилдөөнүн ордуна, $U_1(x, y)$ функциясы (46) барабардыгын канааттандыра тургандыгын далилдейбиз. Ал үчүн xoy тегиздигинен (78-чийме) жылбас $A_0(x_0, y_0)$ ошондой эле өзгөрмө $B(x,y)$ чекиттерин алып, жана

$$U_1(x, y) = \int_{A_0}^{B} Pdx + Qdy, \qquad (48)$$

функциясын карайбыз. Мында A_0B — эрктүү түрдө алынган ийри сызык. Шарт боюнча (43) барабардык орун алгандыктан жана §9 далилденген теорема боюнча (48) туюнтмасындагы интеграл интегралдоо жолунан көз каранды эмес. Эми $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ туундуну эсептейли. Ал үчүн x аргументине Δx өсүндүсүн берсек, анда

$$U_1(x + \Delta x, y) = \int_{A_0}^{B_1} Pdx + Qdy,$$

мында интегралдын жогорку предели $B_1(x + \Delta x, y)$ чекити болот. Анда $U_1(x, y)$ функциясынын айрым өсүндүсү

$$\Delta_x U_1 = \int_{A_0}^{B_1} Pdx + Qdy - \int_{A_0}^{B_1} Pdx + Qdy. \qquad (49)$$

Бул формулага катышкан интегралдар интегралдоо жолунан көз каранды эместигин эске алып, биринчи интегралды

$$\int_{A_0}^{B_1} = \int_{A_0}^{B} + \int_{B}^{B_1}$$

түрүндө карасак болот. Анда

$$\Delta_x U_1 = \int_{B}^{B_1} Pdx + Qdy. \tag{50}$$

Бирок BB_1 кесиндисинде $y - const$ жана $dy = 0$. Демек,

$$\Delta_x U_1 = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx.$$

Акыркы интегралга арадагы маани жөнүндөгү теореманы колдонуп,

$$\Delta_x U_1 = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Мындан

$$\frac{\Delta_x U_1}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y).$$

Демек,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U_1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta\Delta x, y)$$

жана $P(x, y)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн эске алып,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = P(x, y)$$

барабардыгын алабыз. Биз (48) функциясы (46) барабардыктын биринчисин канааттандырганын далилдедик. Ушул эле сыяктуу ал (46) барабардыктын экинчисин канааттандыра тургандыгын далилдөөгө болот. ●

Эми биз толук дифференциалы белгилүү болгон учурда баштапкы $U(x, y)$ функциясын табабыз.

Бирдей дифференциалга ээ болуучу эки функция бири-биринен турактуу гана кошулуучуларга айырмаланышат. Мына ошондуктан

$$U(x,y)=\int_A^B Pdx+Qdy+C \tag{51}$$

формуласы (44) канааттандыра турган бардык функцияларды өз ичине алат жана (51) формула $U(x,y)$ функциясын ийри сызыктуу интеграл аркылуу туюнтат. Эми биз ал функцияны анык интеграл аркылуу туюнткан формуланы алалы. Ал үчүн A_0B интегралдоо контуру үчүн координат окторуна жарыш A_0EB жана A_0kB (78-чийме) сынык сызыктарын алалы. Анда A_0EB контурунда

$$U(x,y)=\int_{A_0E} Pdx+Qdy+\int_{EB} Pdx+Qdy+C,$$

бирок A_0E түз сызыгында $y=y_0$, $dy=0$, ал эми EB түз сызыгында $dx=0$ экендигин эске алсак, анда

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C. \tag{52}$$

Ушундай эле, A_0kB контуру боюнча интегралдап, A_0k түз сызыгында $x=x_0$, $dx=0$, ал эми kB түз сызыгында $dy=0$ экендигин эске алсак, анда

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+C. \tag{53}$$

Ушул (52) жана (53) барабардыктар толук дифференциал аркылуу баштапкы функцияны табуу формулалары болуп саналат.

1-мисал. Эгерде

$$du=(4x^3y^3+3y^2-5x+6)dx+(3x^4y^2+6xy-7)dy \tag{54}$$

толук дифференциалы берилсе, баштапкы $U(x,y)$ функциясын аныктагыла.

△ Мында $P = 4x^3y^3 + 3y^2 - 5x + 6, \quad Q = 3x^4y^2 + 6xy - 7.$
Анда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 + 6y$$

жана (54) туюнтмасы баштапкы функцияга ээ болот. Ал баштапкы функцияны же (52) же (53) баары бир, формулалар менен аныктасак болот. Мисалы (52) формуланы колдонолу жана $x_0 = y_0 = 0$ болсун.

$$U(x,y) = \int_0^x (-5x+6)dx + \int_0^y (3x^4y^2 + 6xy - 7)dy + c =$$

$$= \frac{5}{2}x^2 + 6x + x^4y^3 + 3xy^2 - 7y + c. \ ▲$$

2-мисал. Эгерде $du = \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$ болсо, $U(x,y)$ функциясын аныктагыла.

△ Бул мисалда (43) шарт орун алат. (53) формуласын колдонолу, (x_0, y_0) чекити үчүн $y = x$ түз сызыгынын чекитинен башка (мында функция үзгүлтүккө учурайт) тегиздиктеги ар кандай чекиттерди алууга болот. Биз $x_0 = 0, \ y_0 = 1$ болсун дейли. Анда

$$U(x,y) = -\int_0^x \frac{ydx}{(x-y)^2} + c_1 = \frac{y}{x-y}\Bigg|_0^x + c_1 = \frac{y}{x-y} - 1 + c_1.$$

$c_1 - 1 = c$ белгилеп,

$$U(x,y) = \frac{y}{x-y} + c.$$

Эгерде (53) формуланы колдонсок, анда биз

$$U(x,y) = \frac{x}{x-y} + c$$

функциясын алабыз. Бул эки туюнтма $U(x,y)$ функциясына теңдеш, анткени

$$\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y}$$

айырма туруктуу чоңдукка (бирге) барабар жана аны туруктуу чоңдукка кошууга болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Эгерде $L: x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t$ айланасы болсо,

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,ds \text{ ти}$$

эсептегиле.

2. L: чокулары (0, 0), (1, 0), (0, 1) чекиттери болгон үч бурчтугунун контуру болсо, $\int\limits_L (x+y)ds$ интегралын эсептегиле.

3. Эгерде $L: x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ z = 4t\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ ийри сызыгынын жаасы болсо, $\int\limits_L (x+y+z)ds$ интегралын эсептегиле.

4. Эгерде $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x+y=1 \end{cases}$ ийри сызыгынын биринчи октанта жаткан бөлүгү болсо, $\int\limits_L (x+y)ds$ интегралын эсептегиле.

5. (0, 0) жана (2, 4) чекиттеринин арасындагы $y = x^2$ параболасынын жаасынын узундугун тапкыла.

6. Эгерде ар бир чекиттеги тыгыздык анын ординатасы менен дал келсе, биринчи арк синусоиданын массасын аныктагыла.

7. Бир тектүү биринчи $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ арк циклоидасынын oордук борборун аныктагыла.

8. Эгерде L контуру чокулары (0, 0), (2, 0) жана (1, 1) чекиттери болгон үч бурчтун оң багыты болсо,

$$\int_L x \cos y dx + y \sin x dy$$

интегралын эсептегиле.

9. L контуру $A(0,B,0)$ жана $B\left(\frac{\pi a}{2},0,B\right)$ чекиттерин бириктирген $x = at$, $y = b\cos t$, $z = b\sin t$ ийри сызыгы болсо, $\int_L xydz - xzdy + yzdx$ интегралын эсептегиле.

10. L контуру $A(2,2,5)$ жана $B(0,0,9)$ чекиттерин бириктирген $x + y + z = 9$, $y = x$ тегиздиктеринин кесилүү сызыгы болгон учурда

$$\int_L (x + y)dz + (x + z)dy + (y + z)dx$$

интегралын эсептегиле.

11. Эгерде L биринчи чейректе жаткан $x^2 + y^2 \leqslant 1$ тегеректин контуру болсо, $\int_L (x^2 + 3y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ интегралын түздөн түз жана кош интегралга келтирип эсептегиле.

12. $du = (e^{xy}y + 6x)dx + (e^{xy}x - 6 + 3y^2)dy$, $U(x,y)$ ти тапкыла.

13. $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \left[(x + y + 1)e^x - e^y\right]dx + \left[e^x - (x + y + 1)e^y\right]dy$ ти эсептегиле.

II. БЕТТИК ИНТЕГРАЛДАР

§ 1. БИРИНЧИ ТИПТЕГИ БЕТТИК ИНТЕГРАЛ

Үзгүлтүксүз өзгөрүүчү жаныма тегиздиктүү беттин S бөлүгүн карайлы (79-чийме). Мындай бетти жылма деп айтабыз. Ушул беттин ар бир чекитинде үзгүлтүксүз $f(x, y, z)$ функциясы берилсин. S бетин ийри сызыктын торчосу аркылуу n бөлүккө бөлүп, алардын ар биринин аянтын $\Delta S_i (i = 1,2, \ldots, n)$ менен белгилейли. Ар бир $S_i (i = 1,2, \ldots, n)$ бөлүктөн өз каалашыбызча $M_i(x_i, y_i, z_i)$ чекитин алып, ушул чекиттеги функциянын $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ маанисин эсептеп, сумма түзөбүз:

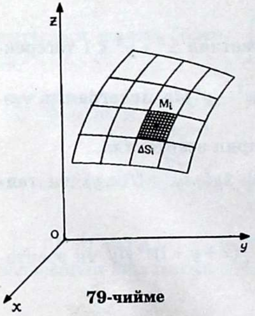
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i. \quad (1)$$

Түзүлгөн сумманы биз, S бети жогоркудай бөлүктөргө бөлүнүшүнө жана ал бөлүктөрдөн тандалып алынган M_i чекитине туура келген интегралдык сумма деп айтабыз.

Аныктама. *Эгерде S_i бөлүктөрүнүн диаметрлеринин ичинен эң чоңу нөлгө умтулган кезде (1) интегралдык сумманын предели, S бетин кандайча жол менен S_i бөлүктөрүнө бөлүүгө жана алардын ар биринен бирден $M_i(x_i, y_i, z_i)$ чекитин кандайча тандап алууга көз карандысыз болбостон дайыма бир гана чектүү пределге ээ болсо, анда ошол предел $f(x, y, z)$ функциясынын S бети боюнча алынуучу биринчи типтеги интегралы деп аталат да жана*

$$J = \iint_S f(x, y, z) ds \quad (2)$$

түрүндө белгиленет.



79-чийме

Эскертүү. Эгерде бет $F(x,y,z)=0$ теңдемеси аркылуу берилсе, анда ал бет жылма болуш үчүн, бир мезгилде нөлгө барабар болбогон бардык чекиттерде үзгүлтүксүз айрым F'_x, F'_y, F'_z туундулары аныкталышы жетиштүү. Бул жыйынтык беттин $M(x_0, y_0, z_0)$ чекитине жүргүзүлүүчү жаныма тегиздиктин

$$F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$$

теңдемесинен келип чыгат.

Эгерде бет $z=f(x,y)$ теңдемеси менен берилсе, анда ал жылма болуш үчүн анын бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз z'_x, z'_y айрым туундулар аныкталышы жетиштүү. Мында дагы беттин $M(x_0, y_0, z_0)$ чекитине жүргүзүлүүчү жаныманын

$$z-z_0=z'_x(M)(x-x_0)+z'_y(M)(y-y_0)$$

теңдемесин алабыз.

Эгерде S бетин жөнөкөй жанымалар аркылуу чектүү сандагы жылма беттерге бөлүүгө мүмкүн болсо, анда S бетин жылма-бөлүктүү бет деп айтабыз.

1. Биринчи типтеги беттик интегралды эсептөө

Биринчи типтеги беттик интегралдын бар болушу жана эсептелиши, ал интегралды кош интегралга келтирүү жолу менен оңой эле чечилет.

Эгерде S бетинин xoy тегиздигиндеги проекциясы D бир маанилүү болсо, б.а. oz огуна жарыш ар кандай түз сызыктар бетти бир гана чекитте кесип өтсө, анда беттин теңдемеси $z=z(x,y)$ ($z(x,y)$ — функциясы D областында бир маанилүү) түрүндө жазылат.

Эми S бети $z=z(x,y)$ теңдемеси аркылуу берилсин. $z(x,y)$ функциясы жана анын айрым z'_x, z'_y туундулары S бетинин xoy тегиздигиндеги проекциясы болгон туюк чектелген D областында үзгүлтүксүз болуп жана $f(x,y,z)$ функциясы S бетинде үзгүлтүксүз болсо, анда беттик интеграл бар болот жана ал

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy \qquad (3)$$

кош интегралына келтирилет.

Эгерде D областында $z = z(x,y)$ функциясы бир маанилүү болбосо, анда S бетин $z(x,y)$ функциясын бир маанилүү болгудай кылып бөлүктөргө бөлүү керек, андан кийин ар бир бөлүк боюнча беттик интегралды кош интегралга келтирип эсептейбиз.

Эгерде S бети $x = x(y,z)$ теңдемеси менен берилип, ал беттин yoz тегиздигиндеги проекциясы D_1 болсо, анда

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_1} f[x,(y,z),y,z)]\sqrt{1+(z'_y)^2+(z'_z)^2}\,dydz \qquad (4)$$

же S бети $y = y(x, z)$ теңдемеси аркылуу, ал эми анын xoz тегиздигиндеги проекциясы D_2 болсо, анда

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_2} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dxdz \qquad (5)$$

формулалар орун алат. Ушул (3), (4) жана (5) формулаларды бөлүктүү жылма беттерге да колдонууга болот.

Бөлүктүү жылма эки жактуу S бети параметрдин $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ теңдемелери аркылуу кандайдыр бир G областында берилип, ал эми $f(x,y,z)$ функциясы S бетинде аныкталып, үзгүлтүксүз болсо, анда

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_G f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,dudv \qquad (6)$$

формуласы орун алат. Мында

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Эскертүү. Биз мурда S бетинин нормалы менен oz огунун оң багыты аркылуу түзүлгөн бурч γ болсо, анда $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \frac{1}{\cos\gamma}$ барабардыгы орун аларын көргөнбүз. Анда да (3) формуланы

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_D f[x,y,z,(x,y)]\frac{dxdy}{\cos\gamma} \tag{7}$$

түрүндө дагы жазууга болот. Ушундай эле (4) формула

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_1} f[x(y,z)y,z]\frac{dydz}{\cos\alpha}, \tag{8}$$

ал эми (5) формула

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_D f[x,y(x,z),z]\frac{dxdz}{\cos\beta} \tag{9}$$

түрүнө келишет. Мында α жана β болсо, S бетинин нормалы менен ox жана oy окторунун оң багыттары боюнча түзүлгөн бурчтар.

Мисалдар. 1. Эгерде S бети биринчи октанта жаткан $6x + 4y - 3z = 12$ тегиздиктин бөлүгү болсо,

$$\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)ds$$

интегралын эсептегиле (80-чийме).

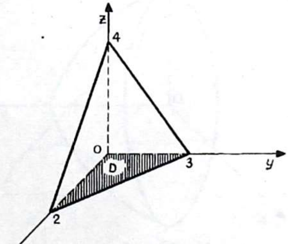
Δ Бет z ке карата

$$z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$$

берилген.

Ошондуктан (3) формуланы колдонууга болот.

Мында $z_x' = -2$; $z_y' = -\frac{4}{3}$ болгондуктан,



80-чийме

$$ds = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}\,dxdy.$$

S бетинин проекциясы xoy тегиздигинде

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

түз сызыктары менен чектелип турат, анда

$$\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) ds = \iint_D \left(4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4}{3}y\right) dxdy =$$

$$= \iint_D 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3}\,dxdy = \frac{4}{3}\sqrt{61}\,mesD = 4\sqrt{61}. \ \blacktriangle$$

2. $\iint\limits_S \left(x + y^2 + z^2 - 3/2\right) ds$ интегралын, $s - 2x + y^2 + z^2 - 4 = 0$ бети $x = 0$ тегиздиги менен кесилген бөлүгү болгон учурда эсептегиле (81-чийме).

Δ Мында беттин теңдемеси x ке карата бир маанилүү аныкталат:

$$x = x(y, z) = 2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$$

жана

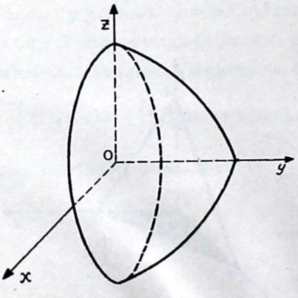
$$x_y' = -y, \quad x_z' = -z.$$

Демек, (4) формуланы колдонуу өтө ыңгайлуу, анда

$$ds = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz =$$

$$= \sqrt{1 + y^2 + z^2}\,dydz.$$

Каралган s бетинин yoz тегиздигиндеги проекциясы $y^2 + z^2 = 4$ айланасы менен чектелген D_1 область (бул беттин теңдемесине $x = 0$ болгон учурда алынат).



81-чийме

Анда

$$\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}\right) ds = \iint\limits_{D_1} \left(2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1 + y^2 + z^2}\, dydz =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} (1 + y^2 + z^2)^{3/2} dydz.$$

Акыркы кош интегралды уюлдук (XII гл. §3) (ρ, φ) системасына өтүү жолу менен эсептейбиз. D_1 областында $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2$ өзгөрөт. Анда

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} (1 + y^2 + z^2)^{3/2} dydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} (1 + \rho^2)^{3/2} \rho d\rho = 2\pi \frac{(1 + \rho^2)^{5/2}}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{5}\pi(25\sqrt{5} - 1). \ \blacktriangle$$

3. $\iint\limits_S y(z + x) ds$ интегралын эсептегиле. Бул учурда S бети $x = 0$, $x = a$ тегиздиктери менен кесилген $y = \sqrt{c^2 - z^2}$ цилиндрдик бет болсун (82-чийме).

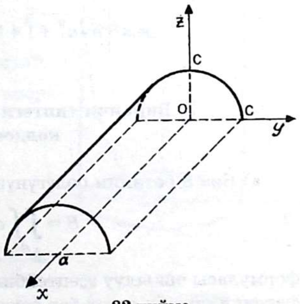
Δ Мында беттин теңдемеси y ке карата бир маанилүү чыгарылып турат. Ошондуктан (5) формуланы колдонуу ыңгайлуу.

$$y'_x = 0, \quad y'_z = -\frac{z}{\sqrt{c^2 - z^2}},$$

$$ds = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\, dxdz =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{c^2 - z^2}} dxdz.$$

Бул беттин xoz тегиздигиндеги проекциясы D_2 тик бурчтук $0 \leqslant x \leqslant a$, $-c \leqslant z \leqslant c$.



82-чийме

Анда

$$\iint_S y(z+x)ds = \iint_{D_2} \sqrt{c^2 - z^2}\,(z+x)\frac{cdxdz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = c\iint_{D_2}(x+z)dxdz =$$

$$= c\int_0^a dx\int_{-c}^{c}(z+x)dz = c\int_0^a \left(\frac{z^2}{2} + xz\right)\Bigg|_{-c}^{c} dx = c\int_0^a 2cxdx = c^2a^2. \ \blacktriangle$$

4. $\iint\limits_S zds$ интегралын S бетин $x = u\cos v,\ \ y = u\sin v$ геликоида бетинин бөлүгү болгон учурда эсептегиле:

$$G(0 < u < a,\ \ 0<v<2\pi).$$

Δ Мында

$$g_{11} = \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1,$$

$$g_{22} = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + 1 = u^2 + 1,$$

$$g_{12} = -u\cos v\sin v + u\sin v\cdot\cos v + 0\cdot 1 = 0.$$

Демек,

$$\iint_S zds = \iint_G v\sqrt{u^2+1}\,dudv = \int_0^a \sqrt{u^2+1}du\int_0^{2\pi} vdv =$$

$$= 2\pi^2\int_0^a \sqrt{u^2+1}du = 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= \pi^2\left[a\sqrt{a^2+1} + \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right]. \ \blacktriangle$$

2. Биринчи типтеги беттик интегралдын колдонулушу

а) Биз S бетинин бөлүгүнүн аянтын

$$S = \iint_S ds \tag{10}$$

формуласы аркылуу эсептейбиз, б.а. беттин аянты беттин дифференциалынан ошол бет боюнча алынуучу беттик интегралга барабар. Мында биз S бети бир маанилүү жылма бет болсун деп эсептейли да S бетин n бөлүккө Δs_i $(i = 1,2,\dots,n)$ бөлөлү.

Андан кийин $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$ суммасын түзөбүз. Ушул суммадан предел алсак,

$$S = \lim_{\max(diam\Delta s_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \iint_S ds$$

алдыңкы формуланы далилдеген болобуз.

Мисалы. $2z = x^2 + y^2$ бетин $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндри кескендеги бөлүгүнүн аянтын эсептегиле (83-чийме).

Δ Параболоиддин $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ теңдемесинен $z'_x = x$, $z'_y = y$ ти тапсак, анда

$$ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$$

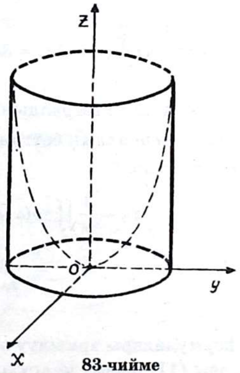
Демек, (10) формула боюнча

$$S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$$

Мында D областы $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ тын областы. Акыркы интегралды эсептөө үчүн уюлдук (ρ, φ) координатасын колдонобуз, анда

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + \rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \left. \frac{(1 + \rho^2)^{3/2}}{3} \right|_0^R = \frac{2}{3}\pi\left((1 + R^2)^{3/2} - 1\right). \blacktriangle$$



83-чийме

б) Эгерде материалдык S бетинин беттик тыгыздыгы $\rho = \rho(x, y, z)$ болсо, анда бетинин бардык массасы

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) ds \tag{11}$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Мисалы. Цилиндрдик $y = \sqrt{9 - z^2}$ беттин $x = 0$, $x = 2$ тегиздиктери менен кесилген бөлүгүнүн аянтын тапкыла, бул учурда беттик тыгыздык $\rho(x, y, z) = ky(x + z)$, $k = const$ болсун (п.1,3-мисал, 4-чийме $a = 2, c = 3$).

Δ Мында $y'_x = 0$, $y'_z = -\dfrac{z}{\sqrt{9 - z^2}}$ болгондуктан

$$ds = \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dxdz = \sqrt{1 + \frac{z^2}{9 - z^2}} dxdz = \frac{3dxdz}{\sqrt{9 - z^2}} = \frac{3}{y} dxdz.$$

Анда (11) формула боюнча

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) ds = \iint_D ky(x + z) \cdot \frac{3}{y} dxdz = 3k \iint_D (x + z) dxdz =$$

$$= 3k \int_0^2 dx \int_3^3 (x + z) dz = 3k \int_0^2 \left(xz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{3} dx = 3k \int_0^2 6x dx = 36k. \blacktriangle$$

в) Кош интегралдын учурундагыдай эле талкуулоо жүргүзүп, материалдык беттин $c_0(x_0, y_0, z_0)$ оордук борборунун координаталары

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x, y, z) ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x, y, z) ds \tag{12}$$

формулалары аркылуу эсептелерине ишенебиз. Мында m массасы (11) формула аркылуу аныкталат.

Эскертүү. Ушул формуладан, эгерде S бети бир тектүү болсо жана симметриялык окко ээ болсо, анда оордук борбор ошол окто жатаарын оңой эле көрүүгө болот. Алсак, эгерде симметриялык ок oz огу болсо, анда $x_0 = y_0 = 0$ болот.

Мисалы. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферасын $z = H$ $(0 \leqslant H \leqslant R)$ тегиздик менен кескендеги бир тектүү кичине сегменттин бетинин оордук борборунун координаталарын тапкыла (84-чийме).

Δ Мында $\left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z = H\right\}$ сызыгынын xoy тегиздигиндеги проекциясы $x^2 + y^2 = R^2 - H^2$ болот, б.а. D областы $x^2 + y^2 \leqslant R^2 - H^2$ тегерек. Кичине сегмент жарым сферанын жогору жагында жатат, анын теңдемеси $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Ошондуктан $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, анда (11) формуланы колдонуп ($\rho - const$),

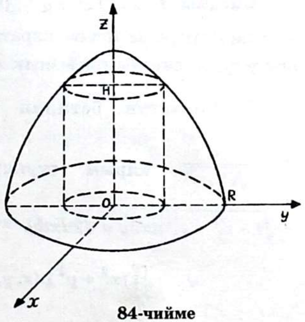
$$m = \rho\iint_S ds = \rho\iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \rho\iint_D \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Акыркы кош интегралды эсептөө үчүн уюлдук (r, φ) системасына өтөбүз, анда

$$m = \rho R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-H^2}} \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= 2\pi\rho\left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-H^2}} R =$$

$$= 2\pi\rho(R - H)R.$$



84-чийме

Алдыңкы эскертүүнү эске алсак, анда $x_0 = y_0 = 0$. Демек, (12) формуланын үчүнчүсү боюнча

$$z_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S \rho z ds = \frac{1}{2\pi\rho R(R-H)}\rho\iint\limits_D \frac{R\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi(R-H)}\iint\limits_D dxdy = \frac{\pi(R^2-H^2)}{2\pi(R-H)} = \frac{R+H}{2}. \blacktriangle$$

г) S бетинин ox, oy, oz окторуна карата инерция моменттери ирети менен

$$J_x = \iint\limits_S (z^2+y^2)\rho(x,y,z)ds, \quad J_y = \iint\limits_S (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds,$$

$$J_z = \iint\limits_S (y^2+x^2)\rho(x,y,z)ds, \tag{13}$$

ал эми xoy, xoz, yoz координаттык тегиздиктерине карата инерция моменти

$$J_{xy} = \iint\limits_S z^2\rho(x,y,z)ds, \quad J_{xz} = \iint\limits_S y^2\rho(x,y,z)ds,$$

$$J_{yz} = \iint\limits_S x^2\rho(x,y,z)ds \tag{14}$$

формулалары аркылуу аныкталат.

Мисалы. 1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ конустун каптал бетинин бөлүгүнүн oz огуна карата инерция моментин тапкыла, бул учурда беттик тыгыздык $\rho(x,y,z)=z$ болсун.

Δ Конустун бетинин теңдемесинен $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ айрым туундуларды тапсак, анда $ds = = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy.$

$$J_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds = \iint\limits_S (x^2+y^2)zds =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}dxdy.$$

Область D: $x^2+y^2 \leqslant h^2$ тегерек болгондуктан (r, φ) уюлдук координатка өтүү ыңгайлуу.

Анда $J_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^4 dr = 2\pi \frac{h^5}{5}$. Ошентип, $J_z = 2\pi \frac{h^5}{5}$. ▲

2. $y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$ жарым сферасынын xoz тегиздигине карата инерция моментин эсептегиле, бул учурда беттик тыгыздык

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ болсун.}$$

Δ Берилген жарым сферанын теңдемесинен

$$y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad y'_z = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}},$$

анда

$$ds = \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dxdz = \frac{Rdxdz}{\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}};$$

$$J_{xz} = \iint_S y^2 \rho(x, y, z) ds = \iint_S y^2 (x^2 + y^2 + z^2) ds =$$

$$= \iint_D (R^2 - x^2 - z^2) R^2 \frac{Rdxdz}{\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}} = R^3 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}\,dxdz.$$

Область D дагы $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ тегереги болгондуктан (r, φ) уюлдук координатына өтөбүз. Анда

$$J_{xz} = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr = 2\pi R^3 \left(-\frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3} \right)\Bigg|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot R^3.$$

Ошентип, $J_{xz} = \frac{2\pi R^6}{3}$.

Акырында, биринчи типтеги бет боюнча интегралды аныктоодо S бетинин сырткы бети же ички бети деп, беттин жагына көңүл бурган жокпуз. Ошондуктан бет боюнча интегралдын мааниси S бетинин жагына, б.а. ал беттин ориентациясына көз каранды болбойт. Эгерде S бетинин сырткы же ички бетин атайын бөлүп карасак, б.а. ориентациясын эске алсак, анда экинчи типтеги беттик интегралдын түшүнүгүнө келебиз.

§ 2. ЭКИНЧИ ТИПТЕГИ БЕТТИК ИНТЕГРАЛ

1. Беттин жагы

Бизге кандайдыр бир S бети берилсин. S бетинде жаткан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекитин алабыз да, S бетине нормаль жүргүзөбүз. Бул нормалдын эки багытынын бирин оң багыт деп кабыл алабыз. Ал оң багыттын бирдик векторун $\vec{n}$ аркылуу белгилеп, S бетинин үстүнө, M_0 чекити аркылуу өтүүчү кандайдыр бир L туюк контурун жүргүзөбүз, бул туюк контур S бетинин чеги менен эч бир жалпы чекитке ээ болбосун. Эми $\vec{n}$ бирдик векторун дайыма S бетине нормаль болуп тургудай кылып L контурун бойлото жылдырып, кайра M_0 чекитине келгиче айлантып чыгабыз. Ошондо $\vec{n}$ бирдик вектордун багыты үзгүлтүксүз өзгөрсүн. Ал $\vec{n}$ бирдик вектор дайыма S бетине нормаль болуп калгандыктан $\vec{n}$ вектору кайрадан M_0 чекитине келгенде төмөнкүдөй эки учурдун бири орун алат: 1) же M_0 чекитине келгенде $\vec{n}$ вектору баштапкы абалына ээ болот. 2) же M_0 чекитине келгенде ал өзүнүн багытын карама-каршысына өзгөртөт. Мына ушуга байланыштуу төмөнкүдөй аныктама беребиз.

Аныктама. *Эгерде S бетинде жаткан, анын чеги менен эч кандай жалпы чекити болбогон, каалагандай туюк контурду бойлоп, айланып чыгууда, ал беттин нормалынын ба-*

гыты өзгөрбөсө, анда S бетин эки жактуу бет дейбиз. Эгерде S бетинин үстүнөн өзүн бойлоп чыкканда, беттин нормалынын багыты карама-каршысына өзгөрө турган туюк контур табылса, анда мындай бет бир жактуу бет деп аталат.

Мисалы. 1) Тегиздик эки жактуу бет болуп саналат жана ал тегиздиктин ар кандай бөлүгү, тегерек, тик бурчтук, көп бурчтуктар ж.б. дагы эки жактуу бетке мисал боло алышат.

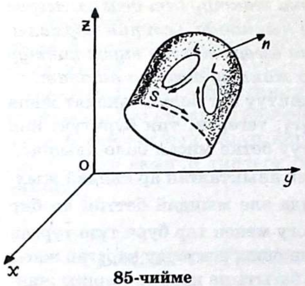
2) $z = f(x, y)$ теңдемеси менен аныкталган ар кандай жылма бет эки жактуу. Чындыгында эле мындай беттин ар бир чекитиндеги нормаль үчүн OZ огу менен тар бурч түзө турган векторду тандап алсак, бул беттин ошол векторду караган жагы бир жакты (сырткы), вектордун багытына карама-каршы жакки бети экинчи жагын (ички) түзөт.

3) Өзү менен өзү кесилишпеген ар кандай туюк беттер, маселен сфера, эллипсоид, туюк цилиндр, туюк конус ж.б. эки жактуу бетке мисал боло алышат. Мында нормалды сыртын көздөй багыттасак, беттин сырт жагына, ичин көздөй багыттасак, ички жагына ээ болобуз.

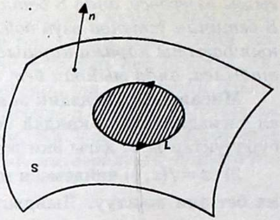
Эки жактуу беттин кандайдыр бир чекитиндеги нормалдын багытын тандап алуу, ал беттин калган бардык чекиттериндеги нормалдын ошол эле багытын тандап алгандык болот. Эки жактуу бетти ориентацияланууучу бет деп, ал эми анын белгилүү бир жагын тандап алууну беттин ориентациясы деп да айтышат.

Беттин жагы жөнүндөгү түшүнүк, ал беттин чек арасынын ориентациясы менен өтө тыгыз байланыштуу. Бир нече контур менен чектелген S бети ориентацияланган болсун. Биз беттин ушул ориентациясына ылайык келүүчү анын чегинин ориентациясын дагы аныктайлы. Беттин нормалынын багыты бутубуздан башыбызды көздөй багытталган учурда беттин чегин түзгөн L контурун бойлоп өтүү багыты оң болуш үчүн S бети дайыма биздин өзүбүздөн сол жакта калууга тийиш.

L дин ага карама-каршы багытын терс багыт катары кабыл алабыз (85-чийме). Эгерде L ийри сызыгы жагы көрсөтүлгөн кандайдыр бир бетти чектеп турган туюк контур болсо, анда деле L дин оң багыты деп чектелген бет сол тарапта кала тургандай болгон багытты айтабыз (86-чийме). Эгерде



85-чийме



86-чийме

жагы көрсөтүлгөн бет тегиздик болсо, бизге белгилүү болгон кадимки ориентацияга, б.а. чектелген область сол жакта калганда гана, атап айтканда контурду бойлоо сааттын жебесине каршы болсо, контур оң багыттуу, тескерисинче болсо терс багыттуу деген макулдашууга келебиз.

2. Экинчи типтеги беттик интегралдын аныктамасы

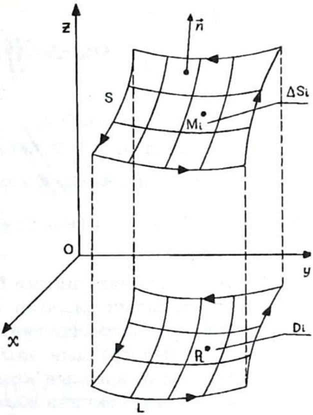
Бизге жылма-бөлүктүү эки жактуу S бети берилсин. Бул беттин белгилүү бир жагын тандап алабыз. Эң мурда S бети $z = z(x, y)$ теңдемеси аркылуу берилген учурун карап көрөлү. Бул функция xoy тегиздигиндеги L контуру аркылуу чектелген D областында аныкталсын. L контуру оң багытта болсун үчүн S бетинин үстүңкү жагын карайбыз. Эми берилген S бетине үстүндөгү бардык чекиттерде $f(M) = f(x, y, z)$ функциясы аныкталсын. Ийри сызыктардын жардамы менен S бетин ΔS_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ элементардык бөлүктөргө бөлүп, ар бир бөлүктөн бирден $M_i\ (x_i, y_i, z_i)$ чекитин алабыз (87-чийме). Бул убакта D областы дагы D_i $(i = \overline{1, n})$ элементардык бөлүктөргө бөлүнөт. Эгерде $\cos\alpha > 0$ болсо, D_i аянты плюс белги менен алынат, эгерде $\cos\alpha < 0$ болсо, минус белги менен алынат.

Эми $f(M) = f(x,y,z)$ функциясынын $M_i\ (x_i, y_i, z_i)$ чекитиндеги маанисин эсептеп, аны ΔS_i элементардык беттин xoy тегиздигиндеги проекциясын D_i аянтчасына көбөйтүп, сумма түзөбүз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot D_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i \quad (15)$$

жана бул сумманы интегралдык сумма деп айтабыз.



87-чийме

Эгерде $\lambda = \max(diamD_i) \to 0$ (15) интегралдык сумманын предели аныкталса жана ал S бетин ΔS_i бөлүккө бөлгөндөн жана ар бир бөлүктөн M_i чекитин тандап алуудан көз каранды болбосо, анда ал пределди $f(M) = f(x,y,z)$ функциясынын S бетинин тандалып алынган жагы боюнча алынган экинчи типтеги беттик интеграл деп айтабыз да

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x,y,z)dxdy \quad (16)$$

символу менен белгилейбиз.

Эгерде S бети $x = x(y,z)$ же $y = y(x,z)$ теңдемелери аркылуу берилсе, анда октордун ролдорун алмаштырып, алдыдагыдай эле талкуулоо жүргүзүп,

$$\iint_S f(M)dydz = \iint_S f(x,y,z)dydz \quad (17)$$

же

$$\iint\limits_S f(M)dxdz = \iint\limits_S f(x,y,z)dxdz \tag{18}$$

формулаларын жаза алабыз.

Эгерде каалагандай S бетинде $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ жана $R(x,y,z)$ функциялары аныкталып, үзгүлтүксүз болушса, анда

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \tag{19}$$

жалпы түрдөгү экинчи типтеги беттик интегралга ээ болобуз.

Беттин тандалып алынган жагы боюнча түзүлгөн интегралдык сумма жана экинчи типтеги беттик интегралдын аныкталышы кош интегралдын аныкталышынан эч айырмаланбайт. Ошондуктан алардын касиеттери дагы бирдей. Эгерде беттин бир жагынан экинчи жагына өтүп интегралдасак, анда белгиси карама-каршы белгиге өзгөрөт.

$$\iint\limits_{S^+} f(M)dxdy = -\iint\limits_{S^-} f(M)dxdy\,.$$

3. Экинчи типтеги беттик интегралдын эсептелиши

Экинчи типтеги беттик интегралды кош интегралга келтирип, эсептейбиз. Ошол максатта (16), (17) жана (18) беттик интегралдарын карайлы жана аларга катышкан $f(x,y,z)$ функциясы S бетинин бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсун дейли.

Адегенде S бети xoy тегиздигиндеги D областында аныкталган $z = z(x,y)$ функциясы аркылуу берилсин (87-чийме).

Бул $z(x,y)$ функциясы $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ айрым туундулары менен бирге үзгүлтүксүз функция болушсун.

Эгерде (16) беттик интеграл S бетинин үстүнкү бети боюнча алынса, анда (15) интегралдык суммадагы D_i лер оң болушат. Ошол (15) суммадагы z_i нин ордуна анын $z(x_i, y_i)$ маанисин койсок, ал сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z(x_i,\ y_i))D_i \tag{15'}$$

түрүнө келип, кадимки кош интегралдык сумма болуп калат. Мындан пределге өтүп,

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_D f(x,y,z(x,y)dxdy \tag{20}$$

формуласына ээ болобуз.

Эгерде (16) беттик интеграл S бетинин астыңкы бети боюнча алынса, анда

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = -\iint_D f(x,y,z(x,y)dxdy, \tag{20'}$$

терс белгилүү кош интегралга ээ болобуз.

Ушул формулалардын жардамы менен биринчи жана экинчи типтеги интегралдардын арасындагы байланыштарды көрсөтө кетели: жогорудагы, биринчи типтеги беттик интеграл менен кош интегралды байланыштырган (19) (§1, п.1 (7)) барабардыктагы γ бурчун тар бурч деп эсептеп (бул болсо интеграл S тин үстүңкү бети боюнча алынып жаткандыгын көрсөтөт), ал барабардыктагы $f(x,y,z)$ функциясын $f(x,y,z)\cos\gamma$ аркылуу алмаштырсак, анда (19) барабардыкты

$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma ds = \iint_D f(x,y,z(x,y)dxdy \tag{21}$$

түрүндө жазууга болот. Ал эми (20) жана (21) барабардыктардын оң жактары барабар болгондуктан алардын сол жактары дагы өз ара барабар болот:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_S f(x,y,z)\cos\gamma ds. \tag{22}$$

Бул болсо экинчи типтеги интеграл менен биринчи типтеги интегралды байланыштыруучу формула болуп саналат.

Эгерде S бети түзүүчүлөрү oz огуна жарыш болгон цилиндрдик бет болсо, анда анын элементтеринин xoy тегиздигине түшүрүлгөн проекциялары нөлгө барабар болушкандыктан

$$\iint_S f(x, y, z)dxdy = 0$$

болот. Бул учурда (22) формула дагы орун алат, анткени $\gamma = \pi/2$ болгондуктан $\cos\gamma = 0$ болору ачык.

Мына ошентип, (22) формула S бети чектүү сандагы $z = z(x, y)$ беттерден жана чектүү сандагы цилиндрдик беттерден түзүлгөн жалпы учурда да орун алат.

Ушул сыяктуу талкуу жүргүзүү менен S бети $x = x(y, z)$ жана $y = y(x, z)$ теңдемелери менен берилген жана тиешелүү окторго жарыш цилиндрдик беттерден түзүлгөн учурда дагы

$$\iint_S f(x, y, z)dydz = \iint_S f(x, y, z)\cos\alpha ds, \tag{23}$$

$$\iint_S f(x, y, z)dxdz = \iint_S f(x, y, z)\cos\beta ds \tag{24}$$

формулалар орун ала тургандыгын көрсөтүүгө болот.

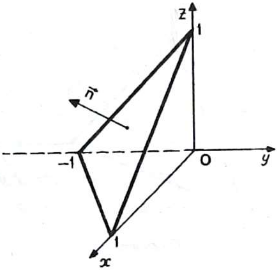
Эгерде S бетинде $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ жана $R(x, y, z)$ функциялары аныкталып, үзгүлтүксүз болушса, анда жалпы түрдөгү (19) экинчи типтеги беттик интеграл төмөнкүдөй биринчи типтеги интегралга келтирилет:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdydx =$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds. \tag{25}$$

Бул формуланын оң жагында S бетинин тандалып алынган жагынын нормалынын багыттоочу косинустары тургандыгын эскертмекчибиз.

Мисалдар: 1. Эгерде S координат октору жана $x-y+z=1$ тегиздиги аркылуу түзүлгөн үч бурчтуктун сырткы бети болсо, $\iint\limits_S xyzdxdy$ интегралын эсептегиле, (88-чийме).



88-чийме

Δ S бетинин сырткы M чекитине жүргүзүлгөн нормаль $\vec{n}$ oz огу менен тар бурч түзөт, ошондуктан (20) формуланы «плюс» белги менен колдонобуз. Ал эми беттин xoy тегиздигиндеги проекциясы $D\{x \geqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x-y \leqslant 1\}$ болгон үч бурчтук. Анда (20) формула боюнча

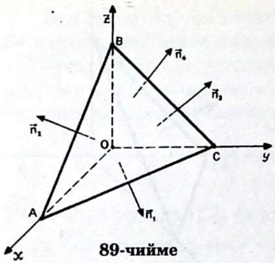
$$\iint\limits_S xydxzdy = \iint\limits_D xy(1-x-y)dxdy = \int_0^1 xdx \int_{x-1}^{0} y(1-x)+y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}(1-x)+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{1-x}^{0} = \int_0^1\left(-\frac{(1-x)^3}{2}+\frac{(1-x)^3}{3}\right)xdx = -\frac{1}{120}. \blacktriangle$$

2. $I = \iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$ интегралын, $S{:}\, x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ $(a>0)$ тетраэдрдин сырткы бети болгон учурда эсептегиле.

Δ Бул учурда (25) формуланы колдонуу ыңгайлуу. Ал үчүн S туюк бети боюнча алынуучу интегралды тетраэдрдин грандары боюнча төрт интегралдын суммасы катарында карайбыз: $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$.

$$J_1 = \iint\limits_{S_1} (yz\cos\alpha + xz\cos\beta + xy\cos\gamma)ds$$



89-чийме

интегралын S_1 бети боюнча ($z = 0$) алабыз. Ал эми S_1 дин проекциясы D_1 дин xoy тегиздигиндеги AOC үч бурчтугу (89-чийме), ал $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ ($D_1 = S_1$) сызыктары менен чектелген. Мында $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = -1$, анда

$$J_1 = \iint_{S_1} xyds = -\iint_{D_1} xydxdy =$$

$$= -\int_0^a xdx \int_0^{a-x} ydy = -\frac{1}{2}\int_0^a x(a-x)^2 dx = -\frac{a^4}{24}.$$

Ушундай эле $J_2 = \iint_{S_2} (yz\cos\alpha + xz\cos\beta + xy\cos\gamma)ds = -\dfrac{a^4}{24}$.

S_2 — беттин теңдемеси $y = 0$ жана $D_2 = S_2$ AOB үч бурчтугу.

$J_3 = \iint_{S_3} (yz\cos\alpha + xz\cos\beta + xy\cos\gamma)ds = -\dfrac{a^4}{24}$, S_3 — бетинин

теңдемеси $x = 0$ жана $D_3 = S_3$ BOC үч бурчтугу. Бул учурда J_2, J_3 интегралдарды эсептебесек деле болот, анткени $J_1 = J_2 = J_3$, себеби интеграл алдындагы туюнтмадагы өзгөрмө чондуктар симметриялуу.

$J_4 = \iint_{S_4} (yz\cos\alpha + xz\cos\beta + xy\cos\gamma)ds$, мында S_4 болсо

$x + y + z = a$ тегиздиктин бөлүгү жана S_4 ти xoy тегиздигине проекциялап D_1 областын алабыз. Анда $Z = Z(x, y)$ бетинин нормалынын багыттоочу косинустарынын формуласын колдонобуз.

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

(радикал алдындагы «плюс» белги беттин сырткы жагына туура келет $(\cos\gamma > 0)$, ал эми «минус» белги ички жагына $(\cos\gamma < 0)$ туура келет). Ал эми биздин S_4 бет үчүн $\cos\alpha = = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ орун алат, себеби анын теңдемеси болуп, $z = a - x - y$ эсептелет. Ошентип,

$$J_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S_4}(yz + xz + xy)ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_4}((y+x)(a-x-y)+xy)+xy)\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}(y(a-x)-y^2+x(a-x))dy =$$

$$= \int\limits_0^a\left(\frac{(a-x)^3}{2} - \frac{(a-x)^3}{3} + x(9-x)^2\right)dx = \frac{a^4}{8}.$$

Демек, $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0.$ ▲

3. Эгерде S бети $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиданын сырткы бети болсо, $J = \iint\limits_{S_2}\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)$ интегралын эсептегиле.

∆ Берилген интегралды сумма түрүндө карайлы:

$$J = \iint\limits_S\frac{dydz}{x} + \iint\limits_S\frac{dzdx}{y} + \iint\limits_S\frac{dxdy}{z}.$$

Мындагы үч интегралдагы x, y, z өзгөрмө чоңдуктар симметриялуу кирип турат жана эллипсоида өзү да бардык координаттык тегиздиктерге карата симметриялуу. Ошондуктан бир гана интегралды чыгаруу жетиштүү. Мисалы:

$$J_3 = \iint\limits_S \frac{dxdy}{z} = \iint\limits_{S_1} \frac{dxdy}{z} + \iint\limits_{S_2} \frac{dxdy}{z}$$

интегралын чыгаралы, S_1 — болсо, $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ эллипсоиданын жогорку жарымы, ал эми, S_2 — болсо, $z = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ эллипсоиданын төмөнкү жарымы. Ушул S_1 жана S_2 беттер xoy тегиздигине $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипси менен чектелген D областына карата проекцияланат. Анда

$$J_3 = \iint\limits_D \frac{dxdy}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \iint\limits_D \frac{dxdy}{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = \frac{2}{c}\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

Акыркы интегралды кеңейтилген уюлдук $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ координатка өтүп эсептейбиз, анда

$$J_3 = \frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{4ab}{c}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{d(r^2)}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= -\frac{2\pi ab}{c}\cdot 2\left(1-r^2\right)^{1/2}\Big|_0^1 = \frac{4\pi ab}{c}.$$

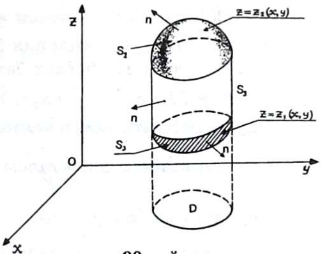
Симметриялуулукту пайдалансак, анда

$$J_1 = \iint\limits_S \frac{dydz}{x} = \frac{4\pi bc}{a}, \qquad J_2 = \iint\limits_S \frac{dzdx}{y} = \frac{4\pi ac}{b}.$$

Демек,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Ушул интегралды биринчи типтеги беттик интегралга өтүп эсептөө өтө татаал боло тургандыгын эскертмекчибиз.



90-чийме

4. Остроградскийдин формуласы

Кош интегралдын теориясында тегиздиктеги белгилүү бир область боюнча алынган кош интеграл менен анын чеги боюнча алынган ийри сызыктуу интегралды байланыштырган Гриндин формуласы менен таанышканбыз. Ошондой эле үч эселик интегралдын теориясында болсо белгилүү бир мейкиндиктик нерсе боюнча алынуучу үч эселик интеграл менен аны чектеп турган беттин сырткы жагы боюнча алынуучу беттик интегралды байланыштыра турган формуланы далилдейбиз. Бул формула Острадскийдин формуласы деп аталат.

Ошол максатта төмөн жагынан S_1, үстүнөн S_2, б.а.

$$z = z_1(x,y) \quad \text{жана} \quad z = z_2(x,y) \tag{26}$$

беттери менен капталынан болсо түзүүчүлөрү oz огуна параллель болгон S_3 цилиндрдик бет менен чектелген мейкиндиктик V областты карап көрөлү (90-чийме).

Мындай областты «z— цилиндрдик» область деп айтабыз. Ал эми $z = z_1(x,y)$ жана $z = z_2(x,y)$ беттери болсо цилиндрдик областы төмөнкү жана жогорку негиздери деп аталат. Ушул область сыяктуу эле түзүүчүлөрү ox же oy окторуна параллель болгон капталдары бар областтар ирети менен «x— цилиндрдик» же «y— цилиндрдик» область болот.

Эгерде берилген областты чектүү сандагы «z — цилиндрдик» ошондой эле «x— цилиндрдик», же «y — цилиндрдик» областтарга бөлүүгө мүмкүн болсо, анда аны жөнөкөй область деп айтабыз.

Биз (26) теңдемелер менен аныкталышкан S_1, S_2 беттери, капталынан S_3 цилиндрдик бет менен чектелген «z — цилиндрдик» областтын бүткүл беттерин бирге алганда S бетин түзсүн дейли ($S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$). Ушул беттин сырт жагын алабыз. Каралган S бети менен чектелген V областында үзгүлтүксүз $R(x, y, z)$ функциясы аныкталсын жана ал үзгүлтүксүз $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ айрым туундуга ээ болсун. Эми $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ функциясынын V областы боюнча алынган үч эселүү интегралын, анын xoy тегиздигине түшүрүлгөн проекциясы D болгон областы боюнча кош интегралга келтирели:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint\limits_D R(x, y, z_2(x, y))dxdy -$$

$$- \iint\limits_D R(x, y, z_1(x, y))dxdy. \qquad (27)$$

Ушул (27) формуланын оң жагындагы биринчи кош интегралды $R(x, y, z)$ функциясынан $z = z_2(x, y)$ бетинин үстүнкү жагы боюнча алынган беттик интеграл менен алмаштырууга болот:

$$\iint\limits_D R(x, y, z_2(x, y))dxdy = \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)dxdy.$$

Ал эми экинчи кош интегралды болсо, $R(x, y, z)$ функциясынан $z = z_1(x, y)$ бетинин үстүнкү жагы боюнча алынган, же анын астыңкы жагы боюнча алынып, тескери белги коюлган беттик интеграл менен алмаштыралы:

$$\iint\limits_D R(x, y, z_1(x, y))dxdy = - \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)dxdy.$$

Натыйжада

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)dxdy. \qquad (28)$$

Мында биринчи интеграл S_2 бетинин үстүнкү жагы, ал эми экинчиси S_1 бетинин астыңкы жагы боюнча алынган. Эми акыркы (28) формуланын оң жагына нөлгө барабар болгон $\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy$ цилиндрдик беттин сырт жагы боюнча алынган беттик интегралды кошсок, анда (28) барабардыктын оң жагы $R(x,y,z)$ функциясынан V областын курчап турган бүткүл S бетинин сырт жагы боюнча алынган беттик интегралды туюнтат. Мына ошентип,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S R\cos\nu ds \tag{29}$$

барабардыгына келебиз. Бул (29) формула чектүү сандагы «z — цилиндрдик» областтарга бөлүүгө мүмкүн болгон ар кандай V областы үчүн дагы туура болот. Чындыгында эле V областын V_i — «z — цилиндрдик» областтарга бөлүп, алардын ар бири үчүн (29) түрдөгү барабардыкты жазып, аларды суммалап чыксак, сол жагында бүткүл V областы боюнча алынган үч эселик интегралга ээ болобуз, ал эми оң жагында болсо, V областынын сырткы S бетинин бөлүктөрү жана V областын V_i областтарга бөлүп турган беттер боюнча алынган i бет боюнча интегралдын суммасына ээ болобуз, мында V областын V_i областтарына бөлүп турган беттери боюнча интегралы эки жолу алынат, биринде ал беттердин бир жагы боюнча алынса, экинчисинде ага карама-каршы жагы боюнча алынат да натыйжада мындай интегралдар өз ара жоюлушуп кетишет. Оң жакта V областын курчап турган Sтин сырткы бети боюнча алынган жалгыз гана интеграл калат, бул болсо (29) барабардыктын чектүү сандагы «z — цилиндрдик» областтарга бөлүнө турган ар кандай V областы үчүн дагы орун ала тургандыгын көрсөтөт.

Эми V областы

$$x = x_1(y,z), \quad x = x_2(y,z) \tag{30}$$

беттери жана түзүүчүлөрү ox огуна жарыш болгон цилиндрдик каптал бет менен чектелген «x— цилиндрдик» область болуп, $P(x,y,z)$ функциясы өзүнүн $\frac{\partial R}{\partial z}$ айрым туундусу менен бирге үзгүлтүксүз болсун дейлик. Анда жогорудагыдай эле талкуулап, биз

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz \qquad (31)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул формула чектүү сандагы «x — цилиндрдик» областка бөлүнө турган ар кандай V областы үчүн дагы орун алат.

Эгерде V областы «y — цилиндрдик» область болсо, анда $Q(x,y,z)$ функциясы өзүнүн $\frac{\partial Q}{\partial x}$ айрым туундусу менен бирге үзгүлтүксүз болушса, жогорудагыдай

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz \qquad (32)$$

барабардыгы орун алат.

Акырында V кандайдыр бир жөнөкөй область болсун. Ал эми $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ жана $R(x,y,z)$ функциялары V областынын ичинде да, аны курчап турган S бетинде да, б.а. V туюк областында өзүлөрүнүн $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ айрым туундулары менен бирге үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда бул функциялар үчүн (29), (31), (32) формулалар бир мезгилде орун алат. Ал барабардыктардын оң жактарын өзүнчө, сол жактарын өзүнчө кошуп,

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \qquad (33)$$

формуласына ээ болобуз. Ал эми биринчи типтеги беттик интеграл боюнча

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint\limits_S \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right]ds \qquad (34)$$

формуласын алабыз. Ушул (33) же (34) формула *Остраградскийдин формуласы* деп аталат.

Мисалы. Эгерде S бети $x^2+y^2+z^2=a^2$ сферасынын сырт жагы болсо, $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ интегралын Остраградскийдин формуласын колдонуп эсептегиле.

Δ Алдыңкы (33) формулага салыштырып, биз $P=x^3$, $Q=y^3$, $R=z^3$ билип,

$$J = 3\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

үч эселик интегралды алабыз. Муну чыгаруу үчүн (r,φ,θ) сфералык координатка өтөбүз:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$

анда

$$J = 3\iiint\limits_{V'} r^2r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int\limits_0^{a} r^4dr = \frac{12\pi a^5}{5}. \ \blacktriangle$$

Остраградскийдин формуласын көлөмдү табуу үчүн да колдонсок болот. Ал үчүн P, Q, R функцияларын $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 1$ болгудай кылып тандап алсак, анда нерсенин V көлөмүн беттик интеграл аркылуу эсептөөгө болот. Ошентип, кезеги менен $P=x$, $Q=0$, $R=0$; же $P=0$, $Q=y$, $R=0$; же $P=0$, $Q=0$, $R=z$ болсун деп тандап алсак, анда нерсенин V көлөмү үчүн

$$V=\iint\limits_S xdydz=\iint\limits_S ydzdx=\iint\limits_S zdxdy \tag{35}$$

формуласын алабыз. Мында бардык интегралдар V көлөмдү курчаган S бетинин сырты боюнча алынуулары тийиш.

Эгерде $P=\frac{x}{3}$, $Q=\frac{y}{3}$, $R=\frac{z}{3}$ болсун деп тандап алсак, анда

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy; \tag{36}$$

же

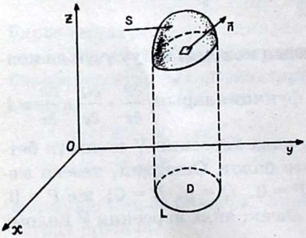
$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds \tag{37}$$

формуласын алабыз.

5. Стокстун формуласы

Эми биз беттик интеграл менен ал бетти чектеп турган ийри сызык боюнча алынуучу ийри сызыктуу интегралды байланыштыра турган формуланы далилдейли. Бул формула Стокстун формуласы деп аталат.

Кандайдыр бир ориентирленген S бети берилип, ал ориентирленген λ туюк контуру менен чектелсин (91-чийме). Ал эми S бетин толук ичине алган мейкиндиктик областта үзгүлтүксүз P, Q жана R функциялары аныкталышсын жана үзгүлтүксүз биринчи тартиптеги айрым туундуларга ээ болушсун. Эми бизден



91-чийме

$$\int\limits_\lambda Pdx+Qdy+Rdz \tag{38}$$

ийри сызыктуу интегралды беттик интегралга келтирүүнү талап кылсын. Эң мурда бет $z = z(x, y)$ теңдемеси менен берилсин жана oz огуна жүргүзүлгөн түз сызыктар бетти бир гана чекитте кесип өтүшсүн. Бетке жүргүзүлгөн $\vec{n}$ нормалынын багытын, ал нормаль oz огунун оң багыты менен тар бурч түзгүдөй кылып тандап алалык $(\cos\gamma > 0)$. Ушул S бетинин xoy тегиздигине түшүрүлгөн проекциясын D менен, анын контурун L менен белгилейли. Коюлган маселени

$$\int_{\lambda} \to \int_{L} \to \iint_{D} \to \iint_{S}$$

схемасы боюнча далилдейбиз, б.а. мейкиндиктин λ контуру боюнча алынуучу ийри сызыктуу интегралдан xoy тегиздигиндеги L контуру боюнча алынуучу ийри сызыктуу интегралга өтөбүз, андан кийин Гриндин формуласы боюнча аны D областы боюнча алынуучу кош интегралга келтиребиз, акырында ал кош интегралы S бети боюнча алынуучу беттик интегралга өтөбүз. Ошентип, (38) интегралдын биринчи кошулуучусун

$$J_1 = \int_{\lambda} P(x, y, z)dx$$

карайбыз жана аны

$$J_1 = \int_{\lambda} P(x, y, z)dx = \int_{L} P(x, y, z(x, y))dx \tag{39}$$

түрүндө жазууга болот. Гриндин формуласы боюнча, акыркы интегралды L контуру чектеп турган D областы боюнча алынуучу кош интегралга келтиребиз. Мында P функциясы y тен z аркылуу татаал функция экендигин эске алсак, анда

$$\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Демек, анда

$$J_1 = -\iint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy \tag{40}$$

барабардыгына ээ болобуз.

Эгерде $\vec{n}$ нормалынын багыттоочу косинустарын аныктоочу формулаларды колдонсок, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ болору белгилүү. Чындыгында эле

$$\cos\beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

болгондуктан, мындан $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ болот. Ушул маанини (40) барабардыгына койсок, анда

$$J_1 = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул кош интегралды (21) формуланы колдонуп, S бети боюнча алынуучу беттик интеграл менен алмаштырабыз.

$$J_1 = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) \cos\gamma ds = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \right) ds$$

же

$$\int_\lambda P(x, y, z) dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) ds \tag{41}$$

барабардыгы келип чыгат.

Ушул сыяктуу эле талкуулоо жүргүзүп,

$$\int_\lambda Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) ds, \tag{42}$$

$$\int_\lambda R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) ds \tag{43}$$

барабардыктарынын орун аларын дагы көрсөтүүгө болот. Акыркы (41), (42) жана (43) барабардыктардын оң жактарын өзүнчө, сол жактарын өзүнчө мүчөлөп, кошсок,

$$\int\limits_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]ds \qquad (44)$$

Стокстун формуласына ээ болобуз.

Беттик эки типтеги интегралды байланыштыруучу (25) формуланы пайдаланып, (44) формуланы дагы

$$\int\limits_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{S}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx\right] \qquad (45)$$

түрүндө жазууга болот.

Эгерде S бети xoy тегиздигинде жатуучу жалпак область болсо, анда $dxdz$ жана $dydz$ боюнча алынуучу беттик интегралдар нөлгө айланышат да Стокстун формуласынан Гриндин формуласы келип чыгат. Демек, Гриндин формуласы Стокстун формуласынын айрым учуру болуп саналат.

Мисалдар. 1. Стокстун формуласын колдонуп, эгерде λ биринчи октанта жаткан $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ эллипсоиддин бөлүгүнүн туюк $ABCA$ чеги болсо,

$$J = \int\limits_{\lambda} 8y\sqrt{1 - x^2 - z^2)^3}\,dx + xy^3dy + \sin zdz$$

ийри сызыктуу интегралын эсептегиле (92-чийме).

Δ Берилген мисалда $P = 8y\sqrt{(1 - x^2 - z^2)^3}$, $Q = xy^3$, $R = \sin z$, анда $\frac{\partial P}{\partial y} = 8\sqrt{(1 - x^2 - z^2)^3}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = -24yz\sqrt{1 - x^2 - z^2}$;

$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^3$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$. Анда (45) формула боюнча

$J = \iint\limits_S y^3 - 8\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dxdy - 24yz\sqrt{1-x^2-z^2}\,dzdx$. Интегралдоо $ABCA$ багытында болгондуктан S бетинин сырткы жагын тандап алабыз. Анда

$$J_1 = \iint\limits_S y^3 - 8\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(y^3 - 8\sqrt{\left(1 - x^2 - 1 + x^2 + \frac{y^2}{4}\right)^3} \right) dxdy =$$

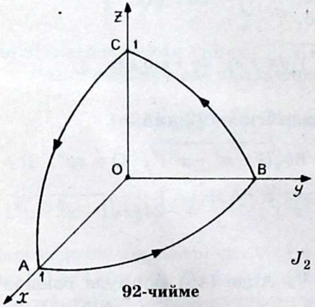
$$= \iint\limits_D \left(y^3 - 8 \cdot \frac{y^3}{8} \right) dxdy = 0.$$

Мында D биринчи квадратта жаткан $x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1$ эллипстин чейреги.

$$J_2 = \iint\limits_S -24yz\sqrt{1-x^2-z^2}\,dzdx =$$

$$= 24\iint\limits_{D_1} 2z\sqrt{1-x^2-z^2} \cdot \sqrt{1-x^2-z^2}\,dzdx =$$

$$= -24\iint\limits_{D_1} 2z(1-x^2-z^2)dzdx.$$



92-чийме

Мында D_1 болсо xoz тегиздигиндеги биринчи квадратта жаткан $x^2 + y^2 \leqslant 1$ тегеректин чейреги. Акыркы интегралга (r, φ) уюлдук координатка өтүп

$$J_2 = -24 \cdot 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r\sin\varphi(1-r^2)rdr =$$

$$= 48\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{32}{5}.$$

Демек,

$$J = J_1 + J_2 = \frac{32}{5}. \blacktriangle$$

2. $J = \int\limits_\lambda (x-2)dx + (x+y)dy - 2zdz$ интегралын, λ чокулары $A\ (1,\ 0,\ 0)$, $B\ (0,\ 1,\ 0)$, $C\ (0,\ 0,\ 1)$ болгон ABC үч бурчтуктун контуру болгон учурда эсептегиле (интегралдоо $ABCA$ багыты боюнча).

Δ Берилген интегралда $P = x - 2$, $Q = x + y$, $R = -2z$. Анда (44) формула боюнча

$$J = \iint\limits_S \cos\gamma ds,$$

мында S үчүн ABC үч бурчтуктун сырткы жагын алабыз, анткени $\cos\gamma > 0$. Ушул беттин теңдемеси $x + y + z = 1$ экендигин эске алсак, анда $\cos = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Демек,

$$J = \iint\limits_S \cos\gamma ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_S ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_D \sqrt{3}dxdy = \frac{1}{2}.$$

Себеби D үчүн AOB үч бурчтугу алынды, ал эми O — координат башталмасы.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ интегралын $x^2+y^2+z^2=R^2$ жогорку жарымынын сырткы жагы боюнча эсептегиле.

Ж о о б у: $\frac{2}{105}\pi R^7$.

2. Жарым сферанын $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ oz огуна карата инерция моментин эсептегиле.

Ж о о б у: $\frac{4}{3}\pi a^4$.

3. $x+y=1$, $y=0$, $x=0$ тегиздиктери менен чектелген $z=x$ тегиздиктин y бөлүгүнүн оордук борборунун координаталарын тапкыла.

Ж о о б у: $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

4. Стокстун формуласын колдонуп, $J=\int\limits_C x^2y^3dx+dy+zdz$ интегралын эсептегиле. Бул учурда C — айлана $x^2+y^2=z^2$, $z=0$ болсун.

Ж о о б у: $-\frac{\pi r^6}{8}$.

5. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$ интегралын үч эселик интегралга келтиргиле.

6. Остраградскийдин формуласын колдонуп,

$$J=\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dxdz+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy,$$

интегралын үч эселик интегралга келтиргиле.

XIV глава

ТАЛААНЫН ТЕОРИЯСЫНАН МААЛЫМАТТАР

§ 1. СКАЛЯРДЫК ТАЛААЛАР

Көпчүлүк физикалык маселелерде скалярдык жана вектордук деп аталуучу эки түрлүү чоңдуктар кездешет. Ушул чоңдуктарга жараша скалярдык жана вектордук талааларды кароого туура келет.

Эгерде мейкиндиктеги кандайдыр бир V областынын ар бир $M(x,y,z)$ чекиттеринде кандайдыр бир $U = U(M) = U(x, y, z)$ скалярдык функция аныкталса, анда мейкиндиктеги V областында скалярдык талаа аныкталды деп айтышат.

Эгерде функция убакыттын өзгөрүшү менен өзгөрбөсө, анда талаа стационардык деп, ал эми өзгөрсө, стационардык эмес деп атайбыз. Скалярдык талаа аркылуу, мисалы, мейкиндиктин ар түрдүү чекиттериндеги чектүү зарядын $U = e/r$ электростатикалык талаанын потенциалы берилет, мында e — заряд, ал эми $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ болсо, $M(x, y, z)$ чекитинен координат башталмасына орнотулган зарядга чейинки аралык. Мында талаа координат башталмасынан башка бардыгында аныкталган. Ушул сыяктуу эле температуранын талаасы, басымдын талаасы ж.б. талаалар берилет.

Айрым учурда, скалярдык талаа тегиздикте да берилет. Бул учурда $U = U(M) = U(x, y)$. Скалярдык талаа аркылуу деңгээл бетти же деңгээл сызыктарды көрсөтүү ыңгайлуу.

Эгерде беттин бардык чекиттеринде скалярдык функция бирдей мааниге ээ болсо, анда аны деңгээл бети деп билебиз, б.а.

$U(M)=C$ же $U(x,y,z)=C$, мында C — туруктуу чоңдук. Ушул теңдеме деңгээл бетинин теңдемеси болот. Скалярдык талаа C нын ар кандай маанилерине туура келген беттердин түркүмүн туюнтат. Маселен, жогорудагы электростатикалык талаанын потенциалынын деңгээл бетинин түркүмүнүн теңдемеси

$\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C$ же $x^2+y^2+z^2=\frac{e^2}{c^2}$. Бул борбору координат

башталмасында, радиусу $R={}^{e}\!/_{c}$ болгон сфералык беттин түркүмү. Тегиздикте $U(x,y)=C$ деңгээл сызыгынын теңдемеси. Температуралардын, басымдардын, ж.б. жайланышууларын дагы атайын катарларда изотерма жана изобара деп аталыша турган деңгээл сызыктары аркылуу сүрөттөшөт.

§ 2. БАГЫТ БОЮНЧА АЛЫНГАН ТУУНДУ

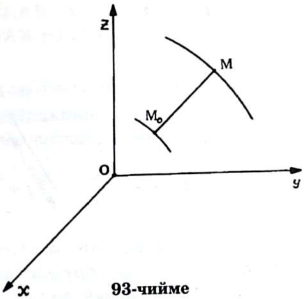
Скалярдык талаа берилген багыт боюнча скалярдык функциянын өзгөрүү ылдамдыгын мүнөздөйт. Бизге $U=U(M)=$ $=U(x,y,z)$ функциясы аркылуу скалярдык талаа берилсин.

M_0 жана M чекиттерин алалы (93-чийме), анда $\frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M}$

чоңдугу $\overline{M_0M}$ багыты боюнча функциянын орточо өзгөрүү ылдамдыгын берет. Ал эми $U(M)$ функциянын M_0 чекитиндеги $\overline{M_0M}$ багыты боюнча алынган туундусу деп $\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0}=$

$=\lim\limits_{M\to M_0}\frac{U(M)-U(M_0)}{MM_0}$ пределин айтабыз. Бул болсо $\overline{M_0M}$ багыты боюнча скалярдык функциянын өзгөрүү ылдамдыгын билгизет. Эми биз ушул туундунун координаттык түрдө жазылышына көңүл буралы. Ал үчүн M_0 жана M чекиттери аркылуу өткөн түз сызыктын параметрдик теңдемесин жазалы:

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cos\alpha, \\ y = y_0 + l\cos\beta, \\ z = z_0 + l\cos\gamma, \end{cases}$$



93-чийме

мында l параметр $(M_0M = l)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — багыттоочу косинустар. Бул учурда скалярдык функция $U = U[x(l),\ y(l),\ z(l)]$ аргумент l татаал функция. Анда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial l},$$

ал эми $\dfrac{dx}{dl} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dl} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{dl} = \cos\gamma$. Анда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (1)$$

формуласына ээ болобуз.

Мисал. Бизге $U = xyz + 5y$, $M_0(0,0,0)$, $M_0(1,1,0)$ берилсин. $\bar{l} = \overline{M_0M}$ багыты боюнча алынган туундуну тапкыла.

Δ Биз $\vec{l}$ векторду табалы: $\vec{l} = (1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = \vec{i} + \vec{j}$. Бул вектордун узундугу $l = \sqrt{2}$, анда бирдик вектор

$$\vec{l}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Ошондуктан, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = 0$.

Анда

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{M_0} = yz\bigg|_{M_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (xz+5)\bigg|_{M_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + xy\bigg|_{M_0}\cdot 0 = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

§ 3. СКАЛЯРДЫК ТАЛААНЫН ГРАДИЕНТИ ЖАНА АНЫН КАСИЕТТЕРИ

Скалярдык талаа $U = U(x, y, z)$ скалярдык функция аркылуу берилсин. Ушул скалярдык талаанын градиенти деп $grad\ u$ символу менен белгиленген векторду айтабыз жана ал

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (2)$$

барабардыгы менен аныкталат. Бул учурда градиенттердин вектордук талаасы берилди деп айтышат. Ушул аныктама координат системасын талдоо менен байланышкан. Ал эми мындан координат системасына байланышпаган аныктамага өтүү жеңил. Ал үчүн $\vec{l}$ багытынын бирдик векторун $\vec{l_0}$ менен белгилесек, анда

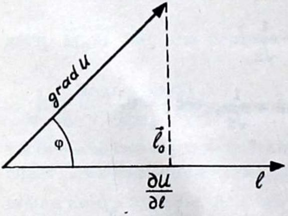
$$\vec{l_0} = \cos\alpha\vec{i} + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Эми скалярдык көбөйтүндүнүн касиетин пайдалансак,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = (grad\ u \cdot \vec{l_0}) =$$

$$= |gradu|\cos(gradu, \vec{l}) = grad_l u. \qquad (3)$$

Демек, багыт боюнча алынган туунду $grad\ u$ векторунун l векторуна түшүрүлгөн проекциясы деп кароого болот (94-чийме).



94-чийме

Ушул (3) формуладан $\frac{\partial u}{\partial l}$ эң чоң мааниге качан l дин багыты градиенттин багыты менен дал келишкенде гана ээ боло тургандыгы жана ал эң чоң маани

$$|gradu| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad (4)$$

барабардыгы аркылуу аныкталары көрүнүп турат.

Эми градиенттин касиеттерине көңүл буралы. Берилген u жана v скалярдык функциялар болушсун. Анда

а) $grad(u \pm v) = gradu \pm gradv$;

б) $grad(u \cdot v) = ugradv + vgradu$;

в) $gradF(u) = \frac{\partial F}{\partial u} gradu$.

Мисал катары акыркы касиетин далилдейли:

$$gradF(u) = \frac{\partial}{\partial x} F(u)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} F(u)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} F(u)\vec{k} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial F}{\partial u} gradu.$$

Гамильтон координаталар окторундагы проекциялары $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ болушкан символдуу вектордон пайдаланууну сунуш кылган, аны «набла» деп атап, ∇ аркылуу белгилеген:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Ушул белгилөөдөн пайдалансак, (2) төмөнкүчө $gradu = \nabla u$ жазылат.

§ 4. ВЕКТОРДУК ТАЛААЛАР

Эгерде мейкиндиктеги V областын ар бир $M(x,y,z)$ чекитинде $\bar{a} = \bar{a}(M) = \bar{a}(x, y, z)$ вектордук функция аныкталса, анда V областында вектордук талаа аныкталды деп айтышат.

Вектордук талаа, скалярдык талаа сыяктуу эле стационардык жана стационардык эмес болушат. Вектордук талаа аркылуу мейкиндиктин ар түрдүү чекиттерине $D = \frac{e}{r^3}\bar{r}$ зарядынын электростатикалык талаанын чыңалуусун берүүгө болот, чекиттин боштукта жылуу ылдамдыгын, күч ж.б. Вектордук талаа вектордук сызыктар аркылуу мүнөздөлөт.

Өзүнүн ар бир $M(x,y,z)$ чекиттериндеги багыты ушул чекитке туура келүүчү $\bar{a}(x,y,z)$ векторунун багыты менен дал келише турган ийри сызык вектордук сызык деп аталат. Алсак, эгерде суюктуктун стационардык агымынын ылдамдыктарынын талаасын карасак, анда вектордук сызык — суюктуктун бөлүкчөлөрүнүн траекториясы болуп саналат. Эгерде

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

түрүндө ажыралса жана $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ кандайдыр бир вектордук сызыктын радиус-вектору болсо, анда $dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ вектору жаныма боюнча ага багытталган.

Вектордук сызыктардын аныктамасы боюнча $\vec{a}$ жана $d\vec{r}$ векторлору коллинеардуу, ошондуктан алардын координаттары пропорционалдуу болушат. Ушул шартты эске алып вектордук сызыктын дифференциалдык теңдемесин алабыз:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Вектордук сызыктардан түзүлгөн бет вектордук бет деп аталат.

Мисалы. Бизге $\vec{a}(x,y,z) = \lambda(-y\vec{i} + x\vec{j})$ вектордук функция берилсин. Анда вектордук сызыктын теңдемеси

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

түрүндө жазылат. Бул теңдеме

$$\begin{cases} dz = 0, \\ \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \end{cases}$$

системасына эквиваленттүү. Биринчисинен $z = c_1$, ал эми экинчисинен $xdx = -ydy$ же $x^2 + y^2 = c_2$. Ошентип, вектордук сызык $\begin{cases} z = c_1 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$ беттеринин кесилишинен пайда болот. Ал $z = c_1$ тегиздигиндеги oz огуна перпендикуляр болгон айлана.

§ 5. БЕТ АРКЫЛУУ ӨТКӨН ВЕКТОРДУН АГЫМЫ

Бизге вектордук $\vec{a} = \vec{a}(M)$ талаа берилсин да S бетин алып, анын белгилүү бир жагын тандап алып, бирдик $\vec{n}$ векторун жүргүзөлү. Анда S бети аркылуу $\vec{n}$ багыты боюнча $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вектордун агымы деп

$$\Phi = \iint_S a_n ds \tag{5}$$

беттик интегралын айтабыз. Мында $a_n = (\vec{a} \cdot \vec{n}) = np_{\vec{n}}\vec{a}$ болсо, $\vec{a}$ векторунун $\vec{n}$ нормалга түшүрүлгөн проекциясы.

Эми $\vec{a}$ векторунун жана $\vec{n}$ бирдик нормалынын координат октору боюнча ажыралышын жазсак, анда

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k};$$

$$\vec{n}(x, y, z) = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

Бул учурда вектордун агымы, скалярдык көбөйтүндүнүн касиети боюнча

$$\Phi = \iint_S a_n ds = \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]ds =$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{6}$$

жалпы түрдөгү беттик интеграл аркылуу туюнтулат.

§ 6. ВЕКТОРДУК ТАЛААНЫН ДИВЕРГЕНЦИЯСЫ

Эми S туюк бети менен чектелген V көлөмүн алалы да, $\vec{n}$ аркылуу туюк беттин сырткы нормалын белгилеп, ошол туюк бет аркылуу өтүүчү $\vec{a}$ векторунун агымын карайлы. Анда аныктама боюнча $\Phi = \iint\limits_S a_n ds$. Ушул агымды жогоркудай эле беттик интегралдын жалпы түрүнө келтирип, андан Остраградскийдин формуласын колдонуп, үч эселик интегралга келтирели

$$\iint\limits_S a_n ds = \iint\limits_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]ds =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV. \qquad (7)$$

Мында үч эселик интегралдын алдында турган туюнтма $\vec{a}$ векторунун дивергенциясы (таралуучулугу) деп аталат да

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (8)$$

символу менен белгиленет. Анда Остраградскийдин формуласы вектордук түрдө төмөндөгүдөй жазылат:

$$\iint\limits_S a_n ds = \iiint\limits_V div\vec{a}dV. \qquad (9)$$

Дивергенция өзү скалярдык чоңдук, б.а. $\vec{a}$ вектордук талаасы $div\,\vec{a}$ скалярдык талааны түзөт деп атайбыз.

Дивергенцияны башкача да аныктоого болот. Ал үчүн туюк V көлөмүнөн эрктүү $M(x,y,z)$ чекитин алалы. Остраградскийдин (9) формуласын колдонобуз. Мында $div\,\vec{a}$ үзгүлтүксүз деп эсептеп, үч эселик интегралга арадагы маани жөнүндөгү теореманы колдонолу, анда

$$\iint\limits_S a_n ds = div\vec{a}\Big|_{M_1} \cdot V,$$

мында M_1 чекити V көлөмүнүн кандайдыр бир чекити. Эми эки жагын V бөлүп, V көлөмү M чекитине умтулсун деп пределге өтөлү (бул учурда $M_1 \to M$). Анда

$$div\,\vec{a}\Big|_{M_1} = \lim_{V \to M} \frac{\iint\limits_S a_n\,ds}{V}. \tag{10}$$

Дивергенцияны ушундайча аныктоо координаталар системасынан көз каранды эмес.

Дивергенциянын (8) аныктамасынын ∇ набла векторунун жардамы менен $div\vec{a} = \nabla \cdot a$ түрүндө да берүүгө болот.

Эми биз дивергенциянын касиеттерине токтололу:

1) $div(\vec{a} \pm \vec{b}) = div\vec{a} \pm div\vec{b}$;

2) Эгерде $\varphi(x, y, z)$ скалярдык функция болсо, анда

$$div(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi div\vec{a} + (\vec{a} \cdot grad\varphi).$$

○ $$div(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial(\varphi \cdot P)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi \cdot Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi \cdot R)}{\partial z} = \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) +$$

$$+ P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi div\,\vec{a} + (\vec{a} \cdot grad\varphi);$$ ●

3) $$divgrad\varphi = div\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Бул туюнтма φ функциясынын лапласианы деп аталат.

Мисал: $div\left(r^5\vec{r}\right)$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ векторун аныктагыла.

Δ Экинчи касиеттин негизинде

$$div\left(r^5\vec{r}\right) = r^5 div\vec{r} + \left(\vec{r} \cdot gradr^5\right).$$

Бирок

$$div\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3;$$

$$gradr^5 = 5r^4 gradr = 5r^4\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) = 5r^3\vec{r}.$$

Ошондуктан

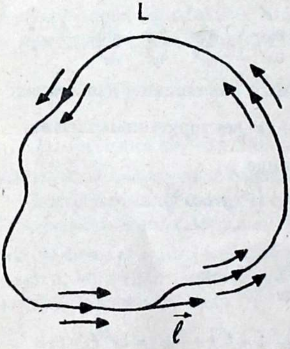
$$div\left(r^5\vec{r}\right) = 3r^5 + \left(\vec{r}\cdot 5r^3\vec{r}\right) = 8r^5. \blacktriangle$$

§ 7. ВЕКТОРДУК ТАЛААНЫН ЦИРКУЛЯЦИЯСЫ

Кандайдыр бир $\vec{a} = a(M)$ вектордук талаа берилип, L — туюк контуру тандалып алынсын (95-чийме). Анда L ийри сызыгы боюнча $\vec{a}$ векторунун циркуляциясы $c = \int\limits_L a_l dl$ ийри сызыктуу интегралына барабар. Мында $a_l = \left(\vec{a}\cdot\vec{l}\right) = np_{\vec{e}}\vec{a}$, L ийри сызыгына жүргүзүлгөн l жанымага түшүрүлгөн $\vec{a}$ проекциясы, эми $\vec{a}$ векторунун жана жаныманын бирдиги l координат октору боюнча ажыралсын:

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k};$$

$$l = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma.$$



95-чийме

Бул учурда, скалярдык көбөйтүндүнүн касиети боюнча, циркуляция L туюк контуру боюнча жалпы түрдөгү ийри сызыктуу интеграл аркылуу туюнтулат:

$$C = \int\limits_L a_l dl =$$

$$= \int\limits_L \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right]dl =$$

$$= \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (11)$$

Эгерде $\vec{a}$ — күчтөрдүн талаасы болсо, анда циркуляция туюк контур боюнча күчтүн аткарган жумушу болот. Эгерде $\vec{a}$ ар кандай башка вектор (ылдамдык, чыңалуу) болсо, анда циркуляция туюк контур боюнча жумушту аныктайт.

Эгерде вектордук сызык түз сызык болсо ($\vec{a}$ — вектору турактуу болсо), анда ар кандай туюк контурдун циркуляциясы дайыма нөлгө барабар. Чындыгында эле, турактуу вектордун координаты P — const, Q — const, R — const болсо, анда $Pdx+Qdy+Rdz$ туюнтмасы толук дифференциал болот. Ошондуктан, туюк контур боюнча ийри сызыктуу интегралдын интегралдоо жолунан көз каранды болбогондуктан, ал нөлгө барабар.

Мисалы. Тегиздикте вектордук $\vec{a} = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ талаанын циркуляциясын саат жебеси боюнча $x = 3\cos t$, $y = \sin t$ ийри сызыгы аркылуу аныктагыла.

Δ Берилген ийри сызык эллипс, ал эми багыт саат жебеси боюнча болгондуктан t чоңдугу 2π ден 0 гө чейин өзгөрөт. Анда циркуляция

$$C = \int_L a_l dl = \int_L y^2 dx + x dy = \int_{2\pi}^{0} (-3\sin^3 t + 3\cos^2 t) dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{2\pi}^{0} (1 + \cos 2t) dt = -3\pi. \blacktriangle$$

§ 8. ВЕКТОРДУК ТАЛААНЫН РОТОРУ

Туюк L контуру аркылуу чектелген кандайдыр бир S бетин алалы. Анда Стокстун формуласы боюнча $\vec{a}$ векторунун ошол туюк контурдун боюндагы циркуляциясын, бет боюнча интеграл аркылуу туюнтууга болот:

$$\int_L a_l dl = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] ds.$$

Мында беттик интегралдын алдындагы функцияны, S бетинин бирдик нормалы $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ менен кандайдыр бир вектордун скалярдык көбөйтүндүсү катарында кароого болот. Ал векторду куюн же вектордук талаанын ротору деп атайбыз жана

$$r\,0t\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Демек, анда Стокстун формуласын вектордук түрдө

$$\int_L a_l dl = \iint_S r0ta_{\bar{n}} ds$$

жазабыз, б.а. вектордун туюк контурдун боюндагы циркуляциясы ошол контур менен чектелген бет аркылуу өткөн куюндун агымына барабар.

§ 9. ПОТЕНЦИАЛДЫК ТАЛАА

Бизге $\vec{a}$ вектордук талаасы берилсин. Эгерде скалярдык u функциясы аныкталып, анын градиенти $\vec{a}$ векторуна барабар болсо, б.а. $\vec{a} = grad u$, анда талаа потенциалдык талаа деп аталат. Мында u функциянын потенциалы, ал эми $\vec{a}$ вектору потенциалдык вектор болот. Эми $\vec{a}$ вектору

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

түрүндө берилсин. Анда бул барабардыкты

$$P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

деп жазсак болот. Мындан

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ушул барабардыктын жардамы аркылуу

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \equiv du,$$

бирдейлигин алабыз. Демек, талаа потенциалдык болот, бул учурда $Pdx + Qdy + Rdz$ туюнтмасы толук дифференциал боло тургандай u функциясы аныкталсын.

Ушул аныктамалардан, потенциал u аныкталса жана табылса, анда ал вектордук талааны толук аныктайт.

Ошентип, $\vec{a}$ талаасы потенциалдык талаа болсун үчүн, бүткүл областта

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

барабардыгынын орун алышы, б.а. $r0t\vec{a} = 0$ болушу зарыл жана жетиштүү болот. Бул учурда потенциалдык талааны куюнсуз талаа деп түшүнүү керек. Ошентип, потенциалдык талаада туюк контурдун боюндагы циркуляция нөлгө барабар болот. Ал эми потенциал

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz \qquad (12)$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Мисал.

$$\vec{a} = (3yz + x^2)\vec{i} + (2y^2 + 3xz)\vec{j} + (z^2 + 3xy)\vec{k}$$

талаа потенциалдык экендигин текшергиле жана потенциалын аныктагыла.

Δ Биз талаа куюнсуз экендигин көрсөтөлү. Чындыгында эле ар кандай $M(x,y,z)$ чекити үчүн

$$r0t\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz+x^2 & 2y^2+3xz & z^2+3xy \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(3x - 3x) + \vec{j}(3y - 3y) + \vec{k}(3z - 3z) = 0 .$$

Демек, $\vec{a}$ талаа бүткүл мейкиндикте потенциалдык болот. Ал эми потенциалды аныктоо үчүн (12) формуланы колдонобуз, M_0 чекит үчүн координат башталмасын алалы

$$u = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y 2y^2 dy + \int_0^z (z^2 + 3xy) dz \pm c =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + 2y^3 + z^3\right) + 3xyz + c. \blacktriangle$$

§ 10. СОЛЕНОИДДИК ТАЛАА

Бизге $\vec{a}$ вектору берилсин. Ушул вектор аркылуу түзүлгөн вектордук талааны соленоиддик же түтүкчө сымал деп атайбыз, эгерде $\vec{b}$ вектору аныкталып, анын ротору $\vec{a}$ векторуна барабар болсо, б.а. $r\,0t\vec{b} = \vec{a}$. Мында вектор $\vec{b}$ ны вектордук потенциал деп айтабыз. Алдыңкы аныктамадагы вектордун координаттарын барабарласак,

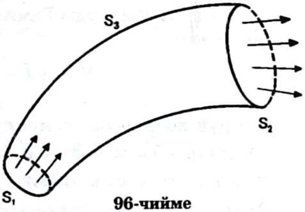
$$a_x = \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}; \; a_y = \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}; \; a_z = \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}. \qquad (13)$$

Векторлордун талаасы соленоиддик болуш үчүн

$$div\vec{a} = 0$$

болушу зарыл жана жетиштүү. Албетте, бул шарт талаа берилген область бир байланыштуу болсо, нерсени курчап турган бет туюк болгон учурда, ал бет аркылуу агып өткөн $\vec{a}$ векторунун агымы нөлгө барабар $\iint\limits_S a_{\vec{n}} ds = 0$ деген шарттын өзү болуп саналат. Бул учурда талаа булактардан жана агымдардан бош болот дегенди билдирет.

Эми каалагандай S_1 жана S_2 кесилиштеринин арасында камалган түтүкчөнү карап көрөлү (96-чийме). Анда алдыңкы барабардыкты



96-чийме

$$\left\{\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}\right\} a_{\vec{n}} ds = 0$$

түрүндө жазууга болот, мында бардык учурда тең нормаль сырт жакка багытталган. Вектордук түтүкчөнүн капталы болгон S_3 бетинде болсо, $a_{\vec{n}} = 0$ болору анык.

Эгерде S_1 кесилишиндеги нормалдын багытын S_2 кесилиштеги нормалдын багыты менен дал келгидей кылып өзгөртсөк, анда акыркы барабардыктан

$$\iint_{S_1} a_{\vec{n}} ds = \iint_{S_2} a_{\vec{n}} ds$$

барабардыгына ээ болобуз. Мындан төмөнкүдөй корутунду айтууга болот.

Соленоиддик вектордун, вектордук түтүкчөнүн туурасынан кесилиши аркылуу өткөн агымы дайыма турактуу чоңдукту сактайт. Бул чоңдукту *вектордук түтүкчөнүн интенсивдүүлүгү* деп аташат.

Акырында, биз мурда караган талаанын негизги мүнөздөрүнө дагы бир ирет көңүл буралы:

1) $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$

2) $div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$

3) $r0t\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$

Ушул туюнтмаларды Гамильтондун "набла" деп аталуучу символикалык

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

операторун колдонсок, төмөнкүдөй болот:

1) $gradu = \nabla u$ көбөйтүндү катарында каралат;

2) $div\vec{a} = \nabla \cdot a$ скалярдык көбөйтүндү;

3) $r0t\vec{a} = \nabla_x a$ вектордук көбөйтүндү.

Ал эми

$$divgrad\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

туюнтмасын символикалык түрдө жазабыз:

$$\nabla(\nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi.$$

Алынган оператор төмөнкүдөй болот:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

Лапластын оператору деп айтабыз жана $\Delta = \nabla^2$ белгиленет.

Ошентип, $divgrad\varphi = \Delta\varphi$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — радиус-векторунун туюк бети

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0\ (0 < z < 1)$$

боюнча агымын тапкыла.

Ж о о б у: π.

2. $F = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ векторунун $x = a\cos t, y = a\sin t$ айлана-сынын оң багыты боюнча циркуляциясын тапкыла.

Ж о о б у: $2\pi a^2 w$.

3. Вектордук $F = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ талаанын MNP үч бурчтугунун контуру боюнча циркуляциясын тапкыла ($M(2,0,0)$, $N(0,3,0)$, $P(0,0,1)$).

Ж о о б у: -5.

4. $F = (2xy + 3y^2 + 9y)\vec{i} + (x^2 + 6xy + 9x)\vec{j}$ талаанын потенциалдык экендигин далилдегиле жана ал талаанын потенциалын тапкыла.

Ж о о б у: $x^2y + 3xy^2 + 9xy$.

5. $u = e^{x+y+z}$ функциясынын градиентинин дивергенциясын аныктагыла.

6. $div(a \times b) = br0ta - arotb$ боло тургандыгын көрсөткүлө.

7. Эгерде $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $a = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ болсо $r0t(r \cdot a)b$ ны тапкыла.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН АДАБИЯТТАР

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.П. — М.: “Высшая школа”, 1981.

Никольский С. М. Курс математического анализа. Т.П. — М.: “Наука”, 1983.

Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — М.: “Наука”, 1988.

Ильин В. А., Садовничний В. А., Сеидов Б. Х. Математический анализ. — М.: “Наука”, 1979.

Зорич В. А. Математический анализ. ч., II.— М.: “Наука”, 1984.

Усубакунов Р. Математикалык анализ. III бөлүк. Фрунзе: “Мектеп”, 1981.

Рудин У. Основы математического анализа. — М.: “Мир”, 1966.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: “Наука”, 1977.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа.

Кудрявцев Л. Д., Кутусов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды). — М.: “Наука”, 1986.

МАЗМУНУ

VIII ГЛАВА

САН КАТАРЛАРЫ

IX ГЛАВА

ФУНКЦИОНАЛДЫК КАТАРЛАР

X ГЛАВА

ӨЗДҮК ЭМЕС ЖАНА ПАРАМЕТРДЕН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН ИНТЕГРАЛДАР

I. Өздүк эмес интегралдар

II. Параметрден көз каранды болгон интегралдар

XI ГЛАВА

ФУРЬЕНИН КАТАРЛАРЫ ЖАНА ИНТЕГРАЛЫ

I. Фурьенин катарлары

XII ГЛАВА

ЭСЕЛҮҮ ИНТЕГРАЛДАР

I. Кош интеграл

II. Үч эселүү интеграл

XIII ГЛАВА

ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ЖАНА БЕТТИК ИНТЕГРАЛДАР

I. Ийри сызыктуу интегралдар

II. Беттик интегралдар

XIV ГЛАВА

ТАЛААНЫН ТЕОРИЯСЫНАН МААЛЫМАТТАР

Учебное издание

Бөрүбаев Алтай Асылканович, Шабыкеев Бектурган,
Бараталиев Керим

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
2 часть

Бишкек, ОАО издательство «Акыл»

(На кыргызском языке)

Издание второе

Окуу китеби

Бөрүбаев Алтай Асылканович, Шабыкеев Бектурган,
Бараталиев Керим

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ
2-бөлүк

Экинчи басылышы

Редактору *Ж. Мундузбаева*
Сүрөтчүсү *Б. Жумалиев*
Сүрөт редактору *К. Коёналиев*
Техникалык редактору *С. Нурмиева*
Корректору *Д. Ороскожоева*
Компьютердик калыпка салгандар: *Ж. Керимбаева,*
Г. Ниязалиева, В. Салихова

ИБ № 5626

Басууга диапозитивден 25.04.05 кол коюлду. Газет кагазы. Кагаздын форматы $60x84^1/_{16}$. «Таймс» ариби. Офсет ыкма менен басылды. 23,25 физ. басма табак, 17,0 шарттуу басма табак, 21,62 учёттук басма табак. Нускасы 500. Заказ № 2180. Келишим баада.

Ачык акционердик коому.
«Акыл» басмасы.

720461. ГСП. Бишкек ш., Ю. Абдырахманов көчөсү, 170.

Даяр диапозитивден алынып «Кыргызполиграфкомбинат» ААКда басылды.

720005, Бишкек ш., Т. Суванбердиев көчөсү 102.